

Tartu Ülikool
Tartu Ülikooli Teaduskool

Valter Kiisk

ELEKTRI JA MAGNETISMI ÜLESANDEID

Tartu 2017

Sisukord

1	Alalisvooluahelad	2
1.1	Elementaarteadmised	2
1.2	Kirchoffi seadused	3
1.3	Ekvivalentskeemid	4
1.4	Spetsiaalvõtted	6
1.5	Mittelineaarsed skeemielemendid	8
2	Kondensaatoreid sisaldavad alalisvooluahelad	10
2.1	Elementaarteadmised	10
2.2	Energia ja elektrilaengu jäävus	11
2.3	Mehaaniline töö	12
2.4	Karakterne aeg	13
3	Elektrostaatika	14
3.1	Elementaarteadmised	14
3.2	Gaussi teoreem	14
3.3	Superpositsiooniprintsiip	15
3.4	Elektridipool	16
3.5	Elektrostaatilise välja energia ja potentsiaal	17
3.6	Elektrostaatiline jõud	18
3.7	Juhid elektrostaatilises väljas	18
3.8	Kujutismeetod juhtides	19
3.9	Dielektrikud elektrostaatilises väljas	20
3.10	Kujutismeetod dielektikutes	20
3.11	Dielektrikud mittehomogeenses väljas	21
4	Magnetostaatika	21
4.1	Biot'-Savart'i seadus	21
4.2	Tsirkulatsiooniteoreem	21
4.3	Superpositsiooniprintsiip	22
4.4	Ampere'i seadus	22
4.5	Magnetdipool	22
4.6	Magnetväli aines	23
4.7	Ferromagneetikud	24
4.8	Ülijuhid	24
5	Elektromagnetiline induktsioon	24
5.1	Faraday induktsiooniseadus	24
5.2	Omainduktsioon	25
5.3	Vastastikune induktsioon	26
5.4	Ekstremaalne vool induktoris ja ekstremaalne pinge kondensaatoril	27
6	Vahelduvvooluahelad	27
6.1	Elementaarteadmised	27
6.2	Siinuslainete liitmine	27
6.3	Kompleksmeetod	28
6.4	Resonants <i>LC</i> -ahelas	29
7	Laetud osakeste liikumine elektri- ja magnetväljas	30
7.1	Laetud osakeste liikumine vaakumis	30
7.2	Laengukandjate liikumine elektrijuhis	31

Eessõna

Käesolev kirjutis on mõeldud abimaterjaliks gümnaasiumi-õpilastele, kes valmistuvad rahvusvaheliseks füüsikaolümpiaadiks. Seega üldjuhul jäävad vaadeldavad ülesanded rahvusvahelise füüsikaolümpiaadi programmiga (<http://www.ioc.ee/~kalda/iph/Syllabus-new.pdf>) määratud piiridesse. Kohati on tarvis tunda diferentsiaal- ja integraalarvutuse algeid ning põhioperatsioone vektorite- ja kompleksarvudega. Rõhuasetus on siiski võrdlemisi lihtsate füüsikaliste ideede ja matemaatiliste võtete loominguks rakendamisel mitmesugustes koolifüüsika jaoks uudsetes olukordades. Loodetavasti on kirjutisest kasu ka füüsika eriala üliõpilastele.

Kõik valemid on väljendatud SI ühikutes. Edaspidi kasutame pikemalt kommenteerimata SI ühikute süsteemi kasutamisest tulenevaid konstante $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m (vaakumi dielektriline läbitavus) ja $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (vaakumi magnetiline läbitavus).

Vektoriaalsete suuruste tähistamiseks kasutatakse "rasvast" kirja (\mathbf{a} , \mathbf{b} , ...). Katus vektori kohal näitab, et tegu on ühikvektoriga (nt $\hat{\mathbf{a}}$ on \mathbf{a} suunaline ühikvektor, pinnanormaal-sihiline ühikvektor on $\hat{\mathbf{n}}$ jne). Vektori \mathbf{a} moodul on tähistatud a , vektoriaalse avaldise, nt $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ moodul on tähistatud $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. Vektorkorrutist tähistame $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, skalaarkorrutist tähistame $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ehk lihtsalt ab . Iga vektori saab lahutada etteantud pinnaga ristiolevaks (normaal-) ja paralleelseks (tangentsiaal-) komponendiks. Nendele viitamiseks kasutame vastavalt indekseid n ja τ (nt $\mathbf{E} = \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_\tau$).

1 Alalisvooluahelad

1.1 Elementaartheadmised

Voolutugevuseks nimetatakse juhi ristlõiget läbivat elektrilaengut ajaühikus: $I = \Delta q / \Delta t$ (SI ühik *amper*, $A = C/s$).¹ Elektrilaengud võivad liikuda mitmesuguste jõudude mõjul. *Elektrostaatilised jõud* on konservatiivsed ja neid võib iseloomustada potentsiaalse energiaga. Ruumpunkti *potentsiaaliks* φ nimetatakse sellesse ruumpunkti asetatud ühikulise proovilaengu elektrostaatilist energiat (ühik *volt*, $V = J/C$). Potentsiaalide erinevus ehk *pinge* U elektrijuhi otste vahel on elektrivoolu tekkimise põhjuseks (laengukandjatele mõjub jõud potentsiaalse energia kahanemise suunas). Potentsiaalide erinevust kutsuvad esile mitte-elektrostaatilised ehk *kõrvaljõud*, näiteks keemilised reaktsioonid vooluallikas. Nende jõudude poolt tekitatavat maksimaalset potentsiaalide erinevust nimetatakse vastava seadme *elektromotoorjõuks*. Seega elektromotoorjõudu \mathcal{E} omava vooluallika läbimisel laengu q pot. energia kasvab $\mathcal{E}q$ võrra, läbides aga elektrijuhi (näiteks takistis) pingelangu U , pot. energia kahaneb Uq võrra. Laetava vooluallika (akumulaatori) puhul on mõeldav ka voolu läbi juhtimine vastassuunas, nii et tehtud töö $\mathcal{E}q$ arvel taastub keemiline energia vooluallika sees.

¹Vähemalt metallides on laengukandjad elektronid, mille laeng on ajaloolistel põhjustel negatiivne ja mille liikumine on seega vastassuunaline elektrivoolule. Kuid elektrilaeng, voolutugevus jm elektrilised suurused on niikuinii märgiga suurused ja vähemalt vooluringide analüüsis pole üldse oluline, milline on voolu mikroskoopiline mehhanism. Laengukandjate olemus tuleb ilmsiks keerulisemates katsetes, nagu Halli efekt.

Enamik elektrijuhte allub *Ohmi seadusele*: voolutugevus läbi elektrijuhi on võrdeline voolu esile kutsuva pingega elektrijuhi otste vahel: $I = U/R$. Suurust R nimetatakse konkreetse elektrijuhi *takistuseks* (ühik *oom*, $\Omega = V/A$). Voolutugevuse ja pinge definitsioonide põhjal on ilmne, et *rööpühenduse* elementide voolud liituvad ning *järjestikühenduses* elementide pinged liituvad. Seega saame järgmised tuntud avaldised takistite jada- ja rööpühenduse kogutakistuse arvutamiseks:

$$R_{\text{jada}} = R_1 + R_2 + \dots, \quad \frac{1}{R_{\text{rööp}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

On kergesti läbinähtav (kujutledes näiteks paljude väikeste takistite jada- või rööpühendust), et pika ühtlase ristlõikega elektrijuhi takistus on võrdeline elektrijuhi pikkusega l ning pöördvõrdeline ristlõikepindalaga S : $R = \rho l / S$, kus ρ on materjali iseloomustav suurus, mida nimetatakse *eritakistuseks*. Eritakistus (kui diferentsiaalne suurus) on vajalik ka juhul kui elektrivoolu ruumiline jaotus või elektrijuhi ristlõige on ebahütlased (jaotis 7.2, ül. 7).

Voolutugevuse ja pinge definitsioone arvestades saame elektrijuhi soojuseks muunduva elektrivõimsuse $P = UI$, mis Ohmi seadusele alluva elektrijuhi korral omandab alternatiivse kuju $P = I^2 R = U^2 / R$ (*Joule'i-Lenzi seadus*).

1 Sobiva liigvoolukaitsme saamiseks ühendatakse kaks sulavkaitsset rööbiti. Esimese kaitsme takistus on 1Ω ja maksimaalne vool (mille juures ühendustraata sulab) 1 A . Teisel kaitsmel on need parameetrid vastavalt 2Ω ja $1,2 \text{ A}$. a) Milline on maksimaalne vool läbi sellise kombineeritud kaitsme? b) Milline oleks vastus juhul kui teise kaitsme maksimaalne vool oleks $1,7 \text{ A}$?

2 Mikroampermeetri mõõtepiirkond on $100 \mu\text{A}$. Sellise voolutugevuse juures tekib ampermeetri klemmidel pingelang $0,1 \text{ V}$. Kuidas ja kui suur takisti tuleks skeemi ühendada, et realiseerida a) voltmeeter mõõtepiirkonnaga 100 V ; b) ampermeeter mõõtepiirkonnaga 10 A ?

3 Elektripirn võimsusega 100 W on ette nähtud 110 V pinge jaoks. Kui suure takistusega takisti tuleb ühendada jadamisi vooluringi, et pirn põleks sama heledusega 127 V vooluvõrgus?²

4 Kaheksa ühesugust hõõglampi on ühendatud konstantse pingega allikaga joonisel 1 kujutatud viisil. Pingeaallikaga järjestikku on voolu piirav takisti, mille takistus on juhtumisi võrdne üksiku lambi takistusega. Kas lampidel eralduv koguvõimsus kasvab või kahaneb, kui üks lampidest läbi põleb? Mitu korda? Lampide takistuse sõltuvust temperatuurist võib ignoreerida.

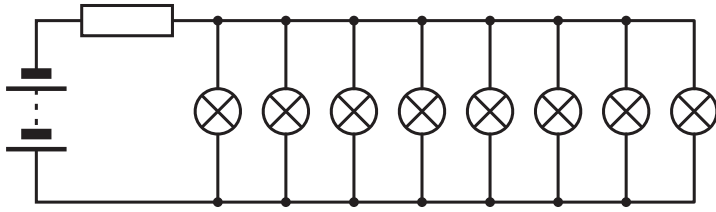
Vastus: Koguvõimsus kasvab ligikaudu 1,11 korda.

5 Spetsiaalsest takistustraadist on lõigatud jupp kogutakistusega R_0 . Sellest vormitakse rõngakujuline kinnine kontuur (joon. 2). Rõnga külge joodetakse kaks kontakti. Leidke kontaktide vaheline takistus kui nurk $\alpha = 120^\circ$!

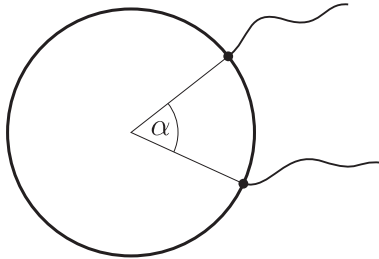
Vastus: $R = (2/9)R_0$.

6 Ookeanivee eritakistuse määramiseks sukeldab mereteadlane vette kaabli, mille otsa on kinnitatud kaks kontsentrist

²Tegelikuses on siin ilmselt tegemist vahelduvvooluga, kuid ülesande lahenduskäik sellest ei muutu, kuivõrd 110 V ja 127 V on vahelduvpinge efektiivväärtused (jaotis 6.1).



Joonis 1: vt ülesanne 4.

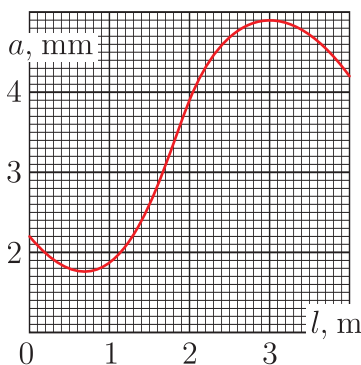


Joonis 2: vt ülesanne 5.

silindrikujulist elektroodi kõrgusega 50 mm. Sisemise elektroodi välisdiameeter on 40 mm ja välise elektroodi sisedia-meeter 45 mm. Elektroodidevaheline takistus on $9\ \Omega$. Leidke vee eritakistus!

Vastus: $\rho \approx 24\ \Omega\ \text{m}$.

7 Ühtlase ristlõikega (pindala $1\ \text{mm}^2$) metalltraadile on kantud millimeeterskaala, kus kriipsud on tõmmatud iga 1 mm järel. Traati venitatakse ebaühtlaselt, nii et kriipsude vaheline kaugus a ei ole enam konstantne, vaid sõltub kaugusest l traadi otsast nagu näidatud joonisel 3. Traadi kogupikkus pärast venitamist on 4 m, kusjuures traadi tihedus venitamisel ei muutu. Leidke venitatud traadi kogutakistus! Materjali eritakistus on $1,0 \times 10^{-6}\ \Omega\ \text{m}$. Märkus. Kui ülesandes on osa läh-teandmeid antud graafikuna, siis lahendus taandub enamasti kas graafiku pindala, tõusu või graafikute lõikepunkti leidmisele.



Joonis 3: vt ülesanne 7.

1.2 Kirchoffi seadused

Meelevaldse keerukusega elektriskeemide analüüsimisel on aluseks Kirchoffi seadused. *Kirchoffi I seadus*: vooluahela mistahes sõlmpunkti koonduvate voolude summa on võrdne sellest sõlmest väljuvate voolude summaga. See on tingitud ühelt poolt elektrilaengu jäävusest (täpsemalt, voolu pidevuse tingimusest) ning teiselt poolt eeldusest, et juhtmete ja nende

sõlmpunktide elektrimahtuvus on tühine (mis kehtib vähemalt piisavalt madalsageduslike protsesside korral).

Siinjuures voolutugevused (nagu ka pinged ja elektromotoorjõud) on *algebralisised suurused*, mis tohivad omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtuseid (voolu-pinge positiivne suund igal elemendil peab olema muidugi üheselt paika pandud).³ Näiteks kui ahelalõigul tuleb voolutugevus negatiivne, siis see lihtsalt tähendab, et tema suund on vastupidine esialgselt postuleeritud suunale. Seega kui ahel sisaldab vaid oomilisi elemente, puudub vajadus analüüsida eraldi kõikvõimalikke voolusuundade või pingepolaarsuste kombinatsioone. Niisiis, kui Kirchoffi I seaduse kontekstis defineerida voolu positiivne suund sõlme poole, võime selle seaduse sõnastada kujul: vooluahela mistahes sõlmpunkti koonduvate voolude algebraline summa on null ehk $\sum_n I_n = 0$ (mõni I_n peab siis ilmselt tulema negatiivne). Kui ahelas on N sõlme, siis Kirchoffi I seaduse alusel saab koostada $N - 1$ sõltumatut võrrandit.

Kirchoffi II seadus: elektromotoorjõudude ja pingelangude algebraline summa piki elektriahela mistahes suletud kontuuri on võrdne nulliga ehk $\sum_n U_n = 0$. Kui pingelang (passiivsel elemendil) võtta positiivne, siis kontuuris voolu esile kutsuv elektromotoorjõud tuleb võrrandisse panna miinuskärgiga. Seadus tuleneb asjaolust, et ringliikumisel piki kontuuri jõuame sama potentsiaaliga punkti tagasi — pingelangu del laengukandja potentsiaalne energia kahaneb (muundub Joule'i soojuseks), elektromotoorjõudude läbimisel aga kasvab (kõrvaljõudude poolt tehtava töö tulemusel). Kirchoffi II seaduse alusel saab kirja panna niipalju võrrandeid, kuipalju on vooluringis sõltumatuid kontuure.

Lihtsamatel juhtudel, kus elektriahela elementide kohta on teada osalist informatsiooni, saab kõik tundmatud suurused avaldada järk-järgult Kirchoffi seaduseid rakendades. Vastasel korral tuleb koostada võrrandisüsteem. Et seda enam-vähem meetodiliselt teha, võib kasutada ühte järgmistest meetoditest.

Potentsiaalide meetod. Vaatleme vooluringi sõlmede potentsiaale (mingi vabalt valitava sõlme suhtes) kui otsitavaid tundmatuid suurusi. Sellega on Kirchoffi II seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame iga sõlme jaoks üles kirjutada Kirchoffi I seaduse, arvutades pinged harudes kui naabersõlmede potentsiaalide vahed.

Kontuurvoolude meetod. Selle meetodi puhul võetakse otsitavateks suurusteks *kontuurvoolud*, st tegelikke voolusid vooluringi harudes, mis on ühised kahele või enamale kontuurile, vaadeldakse kui vastavate kontuurvoolude algebralisi summasid (iga kontuuri jaoks tuleb postuleerida voolu ümberkäigu suund). Sel viisil on Kirchoffi I seadus automaatselt täidetud. Nüüd saame vooluringi kõikide sõltumatute kontuuride jaoks kirja panna Kirchoffi II seaduse.

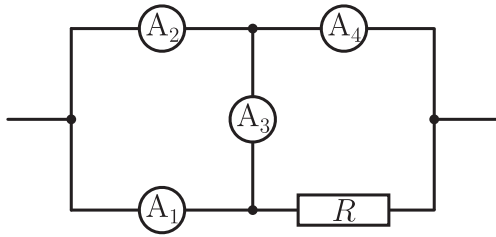
Kirchoffi seadused on lineaarsed ja seega kehtivad ka voolu ja pinge *muutude* jaoks. Oletagem näiteks, et alghetkel koonduvad sõlme voolud I_n ja pärast teatud ajavahemiku möödumist $I_n + \Delta I_n$. Kirchoffi I seadus kehtib nii alg- kui ka lõpp-

³Samamoodi näiteks kirrteoptikas läätse valemi kasutamisel nii eseme/kujutise kaugused läätsest kui ka läätse fookuskaugus võivad vajadusel omada negatiivseid väärtuseid, kui vastav märkide reeglistik on kooskõlalisel paika pandud.

hetkel: $\sum_n I_n = 0$ ja $\sum_n (I_n + \Delta I_n) = 0$, seega tõepoolest $\sum_n \Delta I_n = 0$. Ideaalse elektromotoorjõu allika pinge mõistagi ei muutu ehk $\Delta \mathcal{E} = 0$. Selle näiteks on ülesanne 11, mis sisaldab esmapilgul liiga vähe andmeid, kuid laheneb kergesti mainitud idee abil.

8 Joonisel 4 on kujutatud osa suuremast elektriskeemist. Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit igauksi sisetakistusega 100Ω . Esimese ja teise ampermeetri näidud on vastavalt 3 mA ja 5 mA . Leidke takisti R takistus.

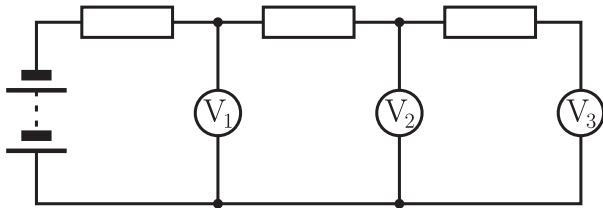
Vastus: 900Ω .



Joonis 4: vt ülesanne 8.

9 Vooluring joonisel 5 koosneb ühesugustest takistitest ja ühesugustest voltmeetritest. Esimese voltmeetri näit on 19 V ja kolmanda voltmeetri näit 9 V . Leidke teise voltmeetri näit!

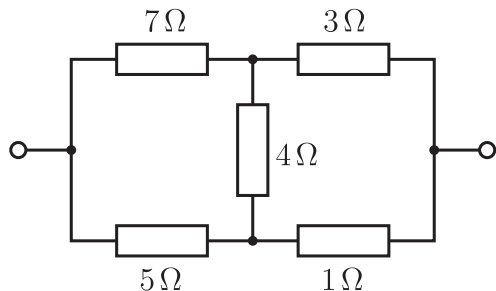
Vastus: 12 V .



Joonis 5: vt ülesanne 9.

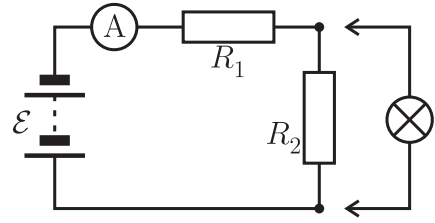
10 Leidke joonisel 6 kujutatud ahela kogutakistus nii potentsiaalide kui ka kontuurvoolude meetodiga. Märkus. Avaldiste lihtsustamiseks võib lugeda, et ahelat läbib vool 1 A või et ahela väljundklemmid on ühendatud 1 V pingeallikaga; esimesel juhul ahela otste vahel tekiv pingelang on arvuliselt võrdne tema takistusega, teisel juhul vastav kontuurvool on arvuliselt võrdne takistuse pöördväärtusega.

Vastus: $26/7 \Omega$.



Joonis 6: vt ülesanne 10.

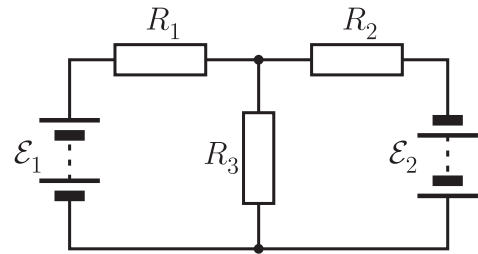
11 Joonisel 7 kujutatud elektriskeemis $R_1/R_2 = 4$. Lambi ühendamisel ampermeetri näit kasvas $0,1 \text{ A}$ võrra. Kui suur on voolutugevus läbi lambi? Pingeallikas ja ampermeeter on ideaalsed, lambi omadused on tundmatud.



Joonis 7: vt ülesanne 11.

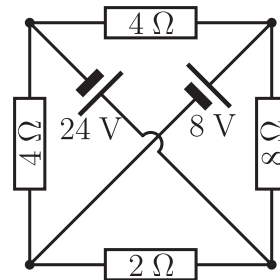
Superpositsiooniprintsiip. Ohmi seadus ning Kirchoffi seadused on lineaarsed, seetõttu vaid oomilisi takisteid ja elektromotoorjõu allikaid sisaldavas elektriahelas toimib *superpositsiooniprintsiip* järgmisel kujul: resultatiivne voolutugevus läbi antud takisti on võrdne kõigi nende voolutugevuste algebralise summaga, mida indutseeriks läbi selle takisti kõik elektromotoorjõu allikad eraldi.

12 Leidke joonisel 8 kujutatud elektriskeemis voolutugevus läbi takisti R_3 .



Joonis 8: vt ülesanne 12.

13 Leidke joonisel 9 kujutatud ahelas vool läbi 8Ω takisti.



Joonis 9: vt ülesanne 13.

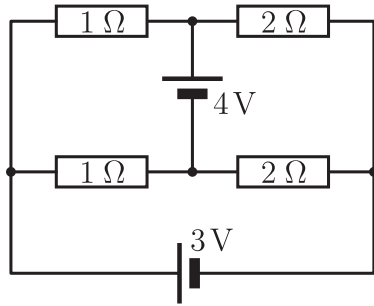
14 Leidke joonisel 10 kujutatud ahelas voolutugevused läbi mõlema elektromotoorjõu allika.

1.3 Ekvivalentsekeemid

Täht- ja kolmnurkühendus. Tähtühenduse saab alati teisendada temaga elektrilise funktsionaalsuse poolest ekvivalentseks kolmnurkühenduseks ja vastupidi (joon. 11). Nimetagem seda Δ -Y teisenduseks. Teisendusvalemid on järgmised:

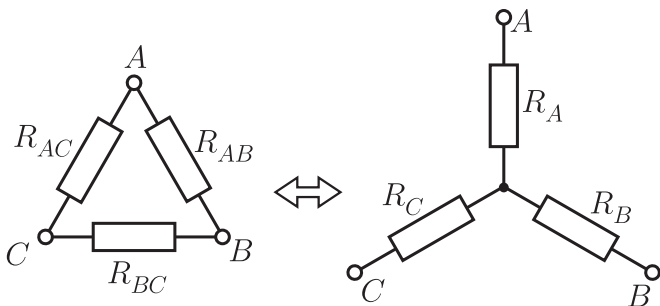
$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}} \text{ jne. tsükliliselt,}$$

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \text{ jne. tsükliliselt.}$$



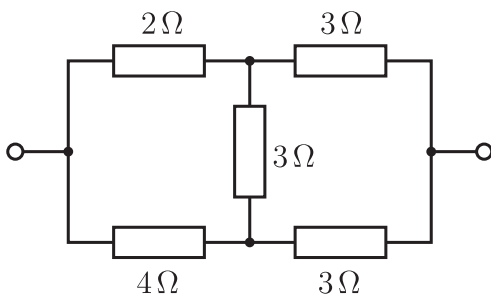
Joonis 10: vt ülesanne 14.

Eriti lihtsa kuju omandavad need valemid juhul kui $R_{AB} = R_{AC} = R_{BC} = R_{\Delta}$ ja $R_A = R_B = R_C = R_Y$. Siis ilmselt $R_Y = R_{\Delta}/3$.



Joonis 11: Täht- ja kolmnurkühendus.

15 Leidke joonisel 12 kujutatud ahela takistus.



Joonis 12: vt ülesanne 15.

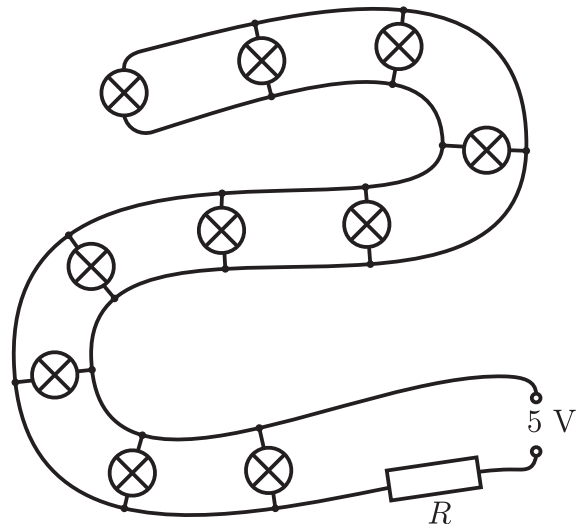
Elektromotoorjõud ja takistus jadamisi. Teatavasti ükski reaalne elektromotoorjõu allikas (galvaanielement, elektrigeneraator, vms) ei suuda säilitada konstantset klemmpinget koormuse kasvades. Sellise seadme lihtsaim mudel eeldab teatava *sisetakistuse* r olemasolu, mis on järjestikku ideaalse elektromotoorjõu allikaga \mathcal{E} ja millel tekib tarbitava elektrivoolu tõttu pingelang Ir , nii et seadme klemmpinge saab olema $V = \mathcal{E} - Ir$. Selgub, et suvaline lineaarsetest elementidest (oomilised takistid, ideaalsed elektromotoorjõu allikad) koostatud kahe väljundklemmiga elektriskeem on ekvivalentne sellise mudeliga, st teatava elektromotoorjõu \mathcal{E} ja takistuse r jadaühendusega (nn Thevenini teoreem). Et konkreetse elektriahela korral veenduda selle väite õigsuses, tuleks näidata, et pinge väljundklemmidel sõltub tarbitavast voolutugevusest I vastavalt seosele $V = \mathcal{E} - Ir$. Selle käigus selguvad ka ekvivalentskeemi parameetrite \mathcal{E} ja r väärtused. Veel

lihtsam tee \mathcal{E} ja r leidmiseks on kirja panna äärmiste juhtude põhjal kaks võrrandit kahe tundmatuga: (1) pinge väljundklemmidel peab olema võrdne ekvivalentse elektromotoorjõuga \mathcal{E} , kui välisahel on katkestatud ($I = 0$); (2) kui väljundklemmid lühistada, siis lühisvool peab olema võrdne \mathcal{E}/r .

Kõige lihtsam ja sageli esinev on *pingejagur* (ülemine skeem joonisel 14). Selle ekvivalentparameetrid tasub lausa meelde jätta.

16 Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 ühesugust taskulambipirni (nimipinge 3 V, nimivõimsus 0,6 W) ja alaldi klemmpingega 5 V. Selle baasil kavandas ta elektriskeemi, mis on kujutatud joonisel 13. Ta arvutas välja, kui suure takistusega takisti R tuleks alaldiga järjestikku ühendada, et pinge lampidel oleks võrdne nimipingega. Alaldi sisselülitamisel selgus, et lambid põlevad siiski oodatust märksa tumimalt. Testriga kontrollimine näitas, et alaldi klemmpinge oli koormusega langenud 4 V-ni ning pinge lampidel 2,3 V-ni. Kui suur tuleks valida takisti R väärtus, et lambid põleksid normaalse heledusega?

Vastus: $R = 1 \Omega$.



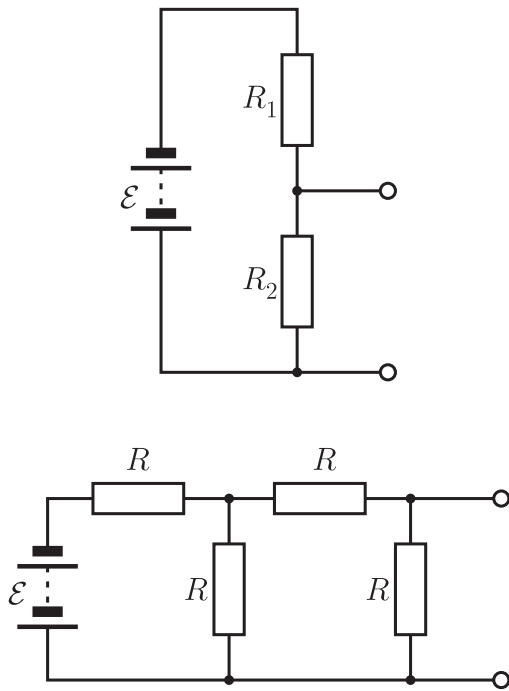
Joonis 13: vt ülesanne 16.

17 Maksimaalset voolu (\mathcal{E}/r) saadakse pingevaldkast mõistagi juhul kui välisahela takistus on null (st klemmid lühises). Ent sel juhul välisahelas eralduv elektrivõimsus on samuti null. Näidake, et maksimaalset kasulikku võimsust saadakse pingevaldkast juhul, kui koormuse takistus on võrdne allika sisetakistusega.

18 Milline on maksimaalne elektrivõimsus, mida saab tarbida joonisel 14 toodud elektriahelate väljundklemmidelt?

19 Lahendage ülesanne 14 ekvivalentskeemi kasutades.

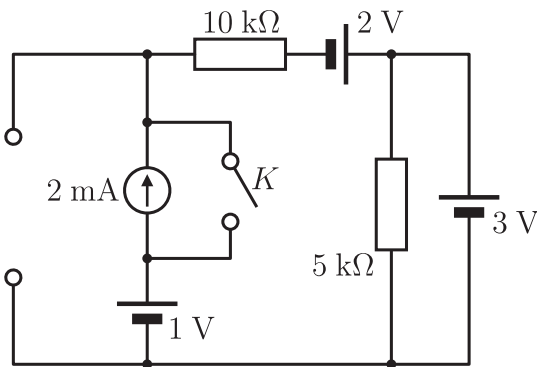
Püsivooluallikas. *Püsivooluallikaks* nimetatakse seadet, mis genereerib teatud konstantse tugevusega voolu sõltumata välisahela takistusest (ehk klemmpingest). Selle tingmärk on kujutatud joonisel 15 (ringike noolega). Tõelist püsivooluallikat (nagu ka püsipingevaldkat) ei eksisteeri. Suvaline lineaarsetest elementidest koostatud kahe väljundklemmiga elektriskeem on ekvivalentne teatava püsivooluallika I_0 ja takistuse r rööplülitusega. On kerge veenduda, et pingevaldkast elektromotoorjõuga \mathcal{E} ning sisetakistusega r on ekvivalentne püsi-



Joonis 14: vt ülesanne 18.

voollallikaga \mathcal{E}/r , mis on ühendatud rööbiti sisetakistusega r .

20 Leidke joonisel 15 toodud elektri ahelas pinge väljundklemmidel ja voolutugevus läbi $10\text{ k}\Omega$ takisti kui lüliti K on a) avatud; b) suletud.



Joonis 15: vt ülesanne 20.

21 N elektromotoorjõu allikat on ühendatud rööbiti. i -nda allika emj on \mathcal{E}_i ning sisetakistus r_i . Millised on saadud liitallika vastavad parameetrid? *Vihje.* Alustuseks on lihtsam leida ekvivalentse püsivoollallika parameetrid.

Vastus:

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_i \frac{1}{r_i} \mathcal{E}_i}{\sum_i \frac{1}{r_i}}, \quad r = \left(\sum_i \frac{1}{r_i} \right)^{-1}.$$

Viimase ülesande lahendusega on tõestatud nn Millman'i teoreem: kui elektri ahel sisaldab kaks sõlme, A ja B , mis on omavahel ühendatud N haruga, kusjuures i -s haru sisaldab elektromotoorjõudu \mathcal{E}_i (märgiga suurus!) jadamiis oomilise takistusega R_i , siis A ja B potentsiaalide vahe avaldub kui

kaalutud keskmine

$$U = \frac{\sum_i \frac{1}{R_i} \mathcal{E}_i}{\sum_i \frac{1}{R_i}}.$$

22 Kirjutage sõnastatud teoreemi abil välja ülesande 12 vastus.

1.4 Spetsiaalvõtted

Sümmeetria. Mingisugusegi sümmeetria olemasolu elektriskeemis viitab sellele, et teatud pinged, potentsiaalid või voolutugevused on võrdsed. Isegi kui ülesande lahendamiseks on tarvis koostada võrrandid Kirchoffi seaduste baasil, vähendavad ahela sümmeetriaomadused tundmatute arvu. Kui elektri ahelat õnnestub niimoodi peegeldada või pöörata, et teatud sõlmpunktid vahetavad oma asukohti nii, et elektriskeem jääb algsega identseks, siis nende sõlmede potentsiaalid peavad järelikult olema võrdsed. Ühesuguse potentsiaaliga sõlmed võib mõistagi lühistada (või hoopis nendevahelise ühenduse katkestada), ilma et ahela elektriline funktsionaalsus muutuks. Ahela sümmeetriat võib analüüsida ka voollallika polaarsuse muutmise suhtes, sest lineaarsete elementide puhul tähendab see lihtsalt seda, et kõik pingelangud ja voolutugevused muudavad märki. Kui peale sellist operatsiooni saadud elektriskeem on identne algsega, siis järelikult sümmeetria kaudu vastavuses olevate elementide pinged ja voolutugevused peavad olema võrdsed.

Ülesandes antud algne elektriskeem võib olla joonistatud võrdlemisi meelevaldselt, kus vajalike sümmeetriaomaduste olemasolu pole üldse ilmne (nt. joon. 16 keskmine skeem).

23 Leidke joonisel 16 kujutatud ahelate takistused.

24 Leidke joonisel 17 kujutatud ahela takistus.

Vastus: $R = 11/6 \Omega$.

25 Leidke joonisel 18 kujutatud ahelas voolud läbi kõikide takistite (elektromotoorjõu allikad on ideaalsed).

26 Kuus takistit on omavahel ühendatud nõnda nagu näidatud joonisel 19. Leidke kahe suvalise terminali vaheline takistus!

Vastus: $R = 1 \Omega$.

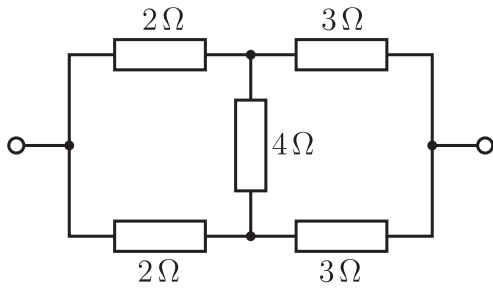
Ideaalne ampermeeter ja voltmeeter. Ideaalse ampermeetri sisetakistus on null ja see sisuliselt lühistab vastavad sõlmed. Ideaalse voltmeetri sisetakistus on lõpmatu ja ahela võib selle juures katkestada. Võib juhtuda, et seejärel elektri ahel lihtsustub takistite jada- ja rööpühenduste kombinatsiooniks. Siis saab juba sirgjooneliselt arvutada voolud-pinged eraldi kõikidel takistitel ja rakendada Kirchoffi reegleid tundmatute voolude-pingete avaldamiseks.

27 Leidke ideaalse ampermeetri näit joonisel 20 kujutatud elektri ahelas.

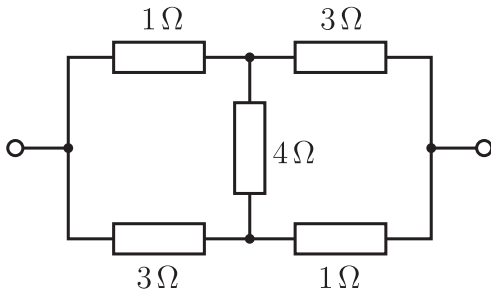
28 Leidke amper- ja voltmeetri näidud joonisel 21 kujutatud elektri ahelas. Mõlemad mõõteriistad on ideaalsed.

Vastus: 1 mA, 4 V.

Lõpmatud perioodilised ahelad. Lõpmatute, perioodiliselt korduva struktuuriga ahelate korral ühe lüli lisamine



Joonis 16: vt ülesanne 23.



Joonis 17: vt ülesanne 24.

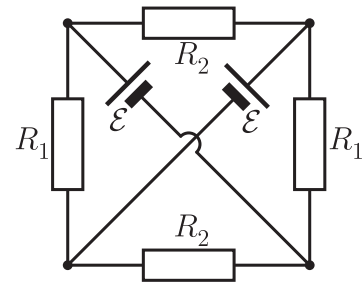
või ärajätmine ei muuda ahela kogutakistust, järelikult saame ahela takistuse R esitada kui kombinatsiooni R -st ja üksiku lüli takistusest ja seejärel saadud seosest avaldada otsitava R .

29 Leidke joonisel 22 kujutatud lõpmatu ahela takistus.

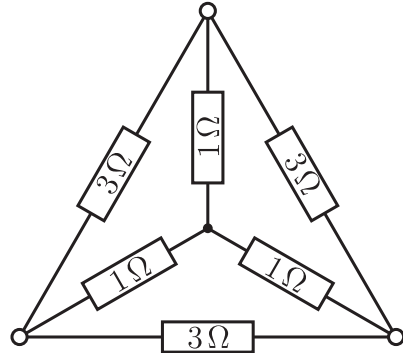
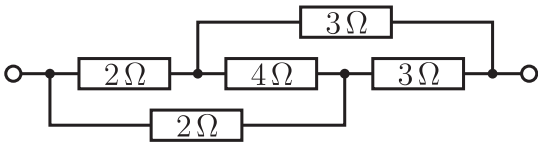
30 Leidke joonisel 23 kujutatud lõputu perioodilise elektri-ahelaga ekvivalentse elektromotoorjõu allika parameetrid.

Lõpmatu perioodiline võre. Järgnevad ülesanded illustreerivad olukorda, kus elektri-ahel on füüsiliselt väga kõrge sümmeetriaga, aga ahelas kulgeva voolu sümmeetria on madalam. Mõningatel juhtudel saab superpositsiooniprintsiibi najal konstrueerida sellised osaülesanded, kus voolu kulgemine on samuti sümmeetriline.

31 Leidke lõpmatu tasandilise trigonaalse võre (joon. 24) kahe naabersõlme vaheline takistus. Naabersõlmi ühendava traadijupi takistus on kõikjal 1Ω . *Juhtnõör.* Tähistame sõl-



Joonis 18: vt ülesanne 25.



Joonis 19: vt ülesanne 26.

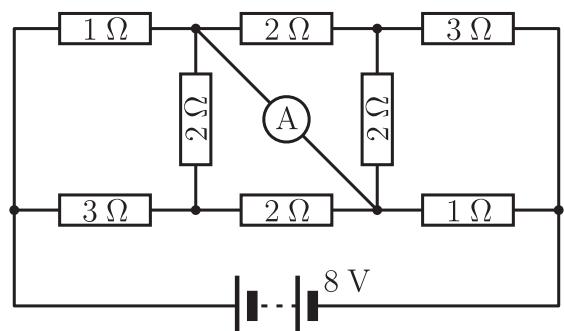
med, mille vahelist takistust otsime, A ja B . Olgu C teatav sõlm, mis asub lõpmata kaugel sõlmedest A ja B . Laseme sõlmest A sisse voolu I ja võtame ta välja sõlmest C . Et C on väga kaugel, siis vool sõlmes A lahkneb sümmeetriliselt kõigis suundades. Analoogiliselt, kui sõlme C suunata vool I ja koguda see kokku sõlmest B , siis võib väita, et vool koondub sõlme B sümmeetriliselt kõigist suundadest.

Vastus: $R = 1/3\Omega$.

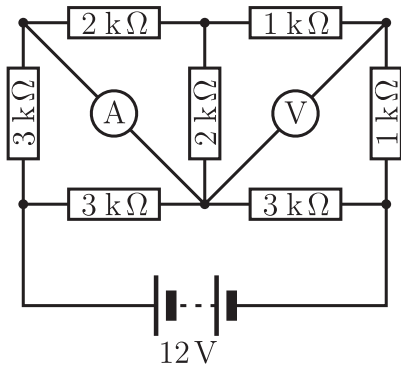
32 Leidke lõpmatu ruumilise kuupvõre naabersõlmede vaheline takistus. Naabersõlmi ühendava traadijupi takistus on kõikjal 1Ω .

Vastus: $R = 1/3\Omega$.

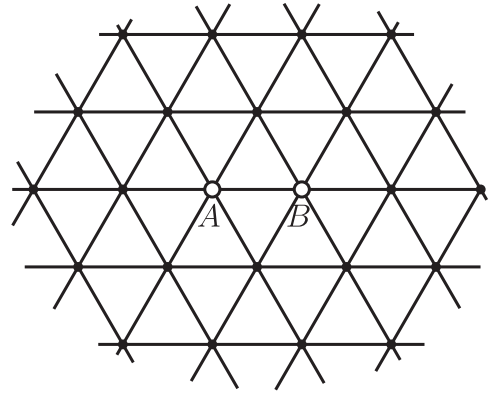
Negatiivne takistus. Elektrijuhhi takistus on ilmselt alati positiivne suurus. Samas matemaatilise võttena on mõeldav ka negatiivne takistus, mille abil saab mõnikord elektri-ahelat sobival viisil “parandada”. Näiteks lühis ahela sõlmede vahel on vaadeldav absoluutväärtuselt võrdsete positiivse ja negatiivse takistuse jadaihendusena, katkestus aga samasuguste



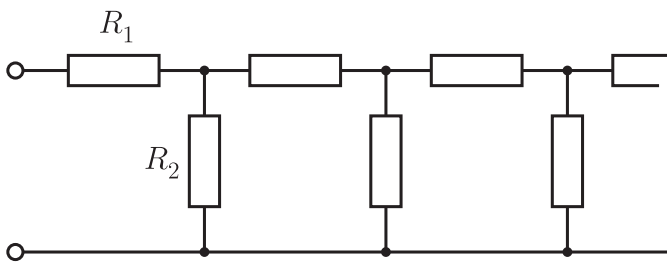
Joonis 20: vt ülesanne 27.



Joonis 21: vt ülesanne 28.



Joonis 24: vt ülesanne 31.



Joonis 22: vt ülesanne 29.

takistite rööpühendusena.

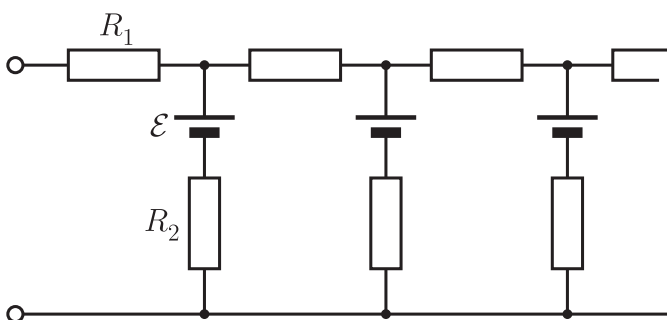
33 Lahendage ülesanne 31 juhul kui sõlmi A ja B ühendav traadijupp on läbi lõigatud.

Vastus: $R = 1/2 \Omega$.

1.5 Mittelineaarsed skeemielemendid

Võrdelisisu elektrijuhti läbiva voolu ja rakendatud pinge vahel on sageli rikutud ja mõnikord võrdlemisi triviaalsetel põhjustel, näiteks elemendi kuumenemise tõttu elektrivoolu toimel. Selle tuntuim näide on hõõglamp, kus hõõgniidi töötemperatuur küündib tuhandete kraadideni ja ei saa ligilähedaseltki eeldada Ohmi seaduse kehtivust suures pingete vahemikus. Tugevalt mittelineaarset kostet tingib ka laengukandjate keeruline liikumine pooljuhtseadistes ja gaaslahendustes.

Ideaalne diood. Diod on pooljuhtseadis, mis ühes suunas juhib voolu võrdlemisi hästi, vastassuunas peaaegu mitte. Diodi nimetatakse ideaalseks, kui päripinge korral on selle takistus null ja vastupinge korral lõpmata suur. Teiste sõnade-

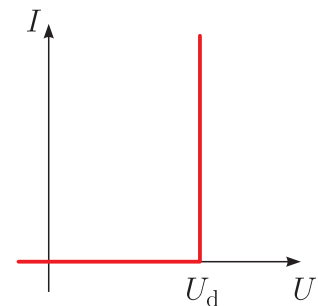


Joonis 23: vt ülesanne 30.

ga, päripinge korral ideaalsel diodil pingelangu üldse ei teki ja diod efektiivselt lühistab ahela, vastupinge korral aga katkestab ahela ja võib enda peale võtta meelevaldse suurusega pinge. Juhul kui on selge diodile rakenduva pinge polaarsus, siis esmapilgul keerulised elektriahelad võivad muutuda võrdlemisi lihtsaks.

Veidi realistlikum (aga siiski idealiseeritud) diodi tunnusjoone mudel on kujutatud joonisel 25, kus diod avaneb täielikult teatud positiivse pinge U_d juures ja sellest madalamatel pingetel on täielikult suletud. Selline mudel on sageli ka praktikas edukalt kasutatav, sest päripingel diodi läbiv vool kasvab ligikaudu eksponentsiaalselt pingega.⁴

Mittelineaarsel elemendil (sh kirjeldatud diodi mudelil) soojusena eralduv elektrivõimsus avaldub endiselt üldvalemiga $P = UI$. Seevastu valem $P = I^2R = U^2/R$ ($R = \text{Const}$) kehtib mõistagi vaid oomilise elemendi korral.



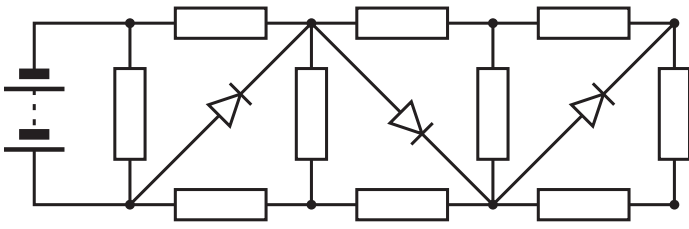
Joonis 25: Diodi voltamperkarakteristika mudel (vt. ül. 35, 47, 60, 150).

34 Mitu korda muutub joonisel 26 toodud skeemis voolutugevus läbi pingeallika, kui viimase polaarsus muuta vastupidiseks? Kõik takistid on võrdsed, diodid ja elektromotoorjõu allikas on ideaalsed.

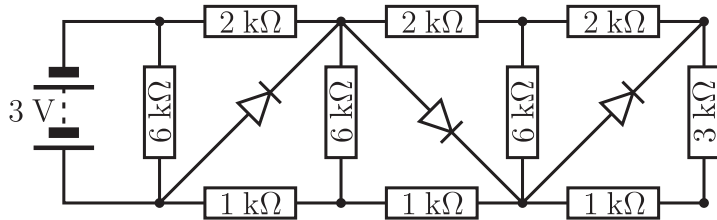
35 Leidke soojusvõimsused, mis eralduvad kõigil diodidel joonisel 27 kujutatud elektriahelas. Diodid järgivad joonisel 25 esitatud mudelit, kus $U_d = 1 \text{ V}$.

Graafiline meetod. Vaatleme elektriskeemi, kus mittelineaarne element on järjestikku oomilise takistiga R ja ahelale rakendub elektromotoorjõud \mathcal{E} (vajadusel tuleb skeem

⁴Näiteks ränidiodide korral on U_d suurusjärgus 0,7 V.



Joonis 26: vt ülesanne 34.



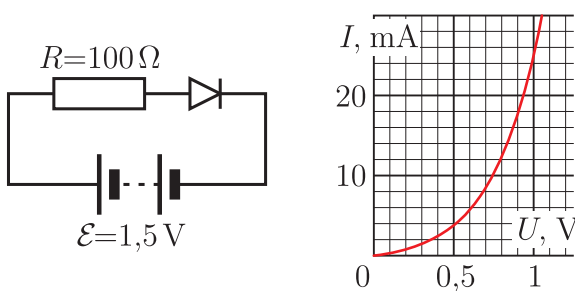
Joonis 27: vt ülesanne 35.

eelpoolmainitud võtetega sellisele kujule taandada). Mittelinearsel elemendil tekivad pingelang U ning voolutugevus I on tundmatud suurused ning Ohmi seadus ahelale tervikuna ei kehti. Kuid takisti tunnusjoone saab siiski esitada U kaudu: $IR = \mathcal{E} - U$. Lahendiks on ilmselt selle sirge ja mittelinearse elemendi tunnusjoone lõikepunkt.⁵ Sirge joonestamiseks piisab kahest punktist, nt $U = 0, I = \mathcal{E}/R$ ning $I = 0, U = \mathcal{E}$.

Kui juhtub mitu mittelinearset elementi olema järjestiku või rööbiti, tuleb nende tunnusjooned liita vastavalt kas voolu või pingele järgi, selleks et saada summaarset voltamperkarakteristikut.

36 Kui suur on voolutugevus joonisel 28 toodud ahelas? Diodi voltamperkarakteristik on toodud juuresoleval graafikul.

Vastus: $I \approx 8 \text{ mA}$.



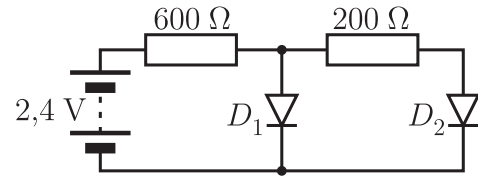
Joonis 28: vt ülesanne 36.

37 Leidke voolutugevus läbi diodi D_2 joonisel 29 toodud ahelas! Diodid on ühesugused ja nende voltamperkarakteristikud sarnanevad ülesandes 36 antuga.

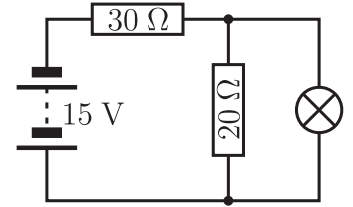
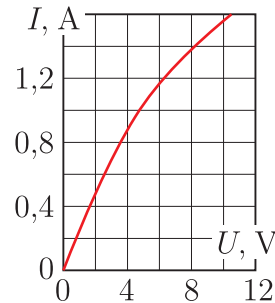
38 Joonisel 30 on kujutatud teatud hõõglambi voltamperkarakteristik. Lamp ühendatakse pingevalikaga nii nagu näidatud juuresoleval skeemil. Kui suur võimsus eraldub lamplil?

Vastus: $P \approx 0,48 \text{ W}$.

⁵Matemaatiliselt on tegu transsendentse võrrandi $f(x) = ax + b$ graafilise lahendamise, milleks tuleb leida graafikute $y = f(x)$ ja $y = ax + b$ lõikepunkt.



Joonis 29: vt ülesanne 37.



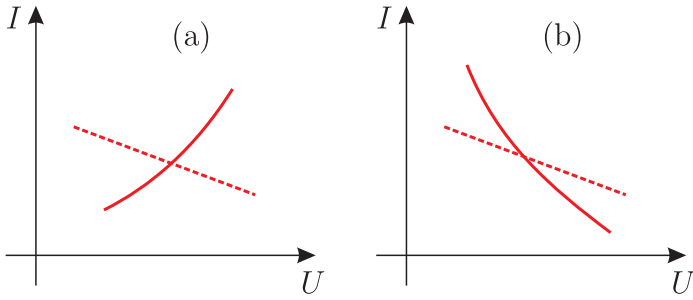
Joonis 30: vt ülesanne 38.

Lahendi stabiilsus, hüsteresis. Kui mittelinearse elemendi tunnusjoon on küllalt iseäraliku kujuga (gaaslahenduslambid, türistorid, tunneldiodid jms), võib lõikepunkte olla mitu. Mõned nendest on harilikult ebastabiilsed. Stabiilsuse uurimiseks analüüsime, mis juhtub, kui pinge U kaldub mingi häirituse tulemusena oma tasakaalulisest väärtusest õige pisut kõrvale. Selleks oletame, et mittelinearse elemendiga on rööbiti ühendatud väike kondensaator.⁶ Kui pinge elemendil veidikene kasvab, siis voolud läbi mittelinearse elemendi ja takisti ei ole enam võrdsed ja kondensaator hakkab kas laaduma või tühjenema olenevalt sellest, milline on mittelinearse elemendi tunnusjoone puutuva tõus (st diferentsiaalne takistus) lõikepunkti juures. Kui osutub, et $dU/dt > 0$, siis pinge üha jätkab kasvamist kuni süsteem jõuab mingisse teise tasakaalupunkti. Nii on kerge näha, et näiteks juhtum (a) joonisel 31 on stabiilne, aga (b) ebastabiilne. Viimane vastab olukorrale, kus mittelinearse elemendi diferentsiaalne takistus (millest tuleb juttu edaspidi) on negatiivne. Kui stabiilseid lahendusi on mitu, siis see, milline nendest tegelikult realiseerub, hakkab sõltuma ajaloost (kuidas on ahelale rakendatud pinget varasemalt muudetud). Teatud kujuga tunnusjoonte korral võib see tingida *hüstereesi*: muutes tsükliliselt pinget või voolu elemendil, saadakse $I-U$ graafikul silmusetatoline kõver (vt. ül. 39 ja 140).

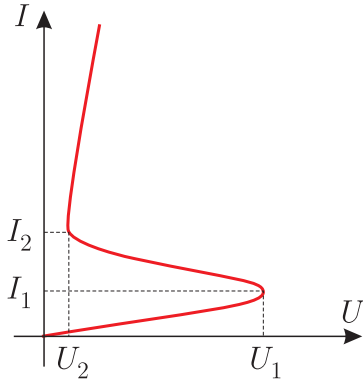
39 Joonisel 32 on kujutatud türistori tunnusjoone põhimõtteskeem. Türistor ühendatakse jadamisi takistiga R . Milline minimaalne pinge U_0 tuleb ahelale rakendada, et türistor avaneks (st voolutugevus ahelas kasvab hüppeliselt)? Skitseerige voolutugevuse muutumine ahelas, kui ahelale rakendatud pinge kasvab sujuvalt 0-st U_0 -ni ja seejärel väheneb uuesti nullini!
Vastus: $U_0 \approx U_1 + I_1 R$.

Diferentsiaalne takistus. Kui mittelinearset elementi läbib vool varieerub niivõrd väikestes piirides, mille ulatuses selle elemendi tunnusjoone võib lugeda lineaarseks, siis elektriskeemi analüüsimisel vahelduvkomponendi seisukohalt võib

⁶Alternatiivne variant oleks ühendada seadmega jadamisi induktor. Tegelikult mistahes skeemielement omab teatavat parasiitset mahtuvust ja induktiivsust.



Joonis 31: Lahendi stabiilsus takisti ja mittelineaarse elemendi jadalülituses.

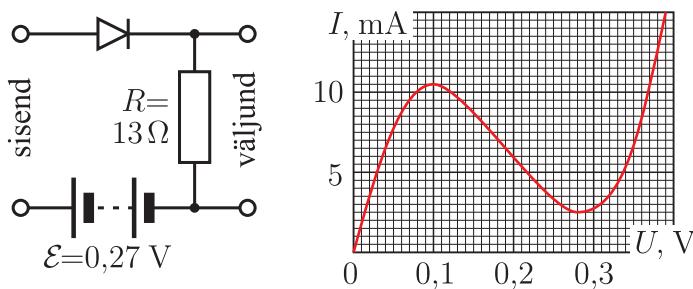


Joonis 32: vt ülesanne 39.

selle elemendi asendada ekvivalentse oomilise takistiga, mille takistus on määratud tunnusjoone tõusuga $\Delta U/\Delta I$ ehk *diferentsiaalse takistusega* uuritavas tunnusjoone piirkonnas. Erinevalt integraalsest takistusest ($R = U/I$) võib diferentsiaalne takistus olla ka negatiivne.

40 Tunneldiodi erilise ehituse tõttu on tema tunnusjoon ligikaudu selline nagu kujutatud graafikul joonisel 33. Toodud on ka lihtsaima tunneldiodil põhineva võimendi skeem. Leidke, mitu korda võimendatakse sisendisse antavat väikese amplituudiga vahelduvsignaali.

Vastus: ~ 3 korda.



Joonis 33: vt ülesanne 40.

41 Voolutugevuse määramiseks elektri ahelas lülitatakse ahelasse muudetava mõõtepiirkonnaga ampermeeter. Mõõtepiirkonnal 10 mA on ampermeetri näit 2,95 mA, mõõtepiirkonnal 3 mA aga 2,90 mA. Milline on voolutugevus ahelas ilma ampermeetriga? Võib eeldada, et tegu on magnetoelektrilise ampermeetriga, millel sisetakistus on pöördvõrdeline mõõtepiirkonna ulatusega. *Juhtnõör.* Kuna ampermeetri näitude erinevus on suhteliselt väike, siis võib kasutada lineaarset lä-

hendust ja lugeda ahelasse lülitatud lisatakistist tingitud voolutugevuse muutuse võrdeliseks takistuse suurusega.

Vastus: $I = 2,97$ mA.

Hõõglamp. Hõõglambi lihtsaimas mudelis võib soojusjuhtivusest tingitud kaod jätta arvestamata ja eeldada, et kogu kulutatud elektrienergia hajub kiirgusena. Seejuures hõõgniidi võib lugeda *halliks*, st tema kiirguse intensiivsus pindalaühiku kohta on võrdne $\alpha\sigma T^4$, kus α on pinna kiirgamisvõimet iseloomustav parameeter (volframi puhul ligikaudu 0,5). Soojusjuhtivus annab ka mõningase panuse, kuid see on esimeses lähenduses võrdeline temperatuuride vahel. Seega soojusjuhtivuse panus muutub kõrgematel temperatuuridel kaduvväikeseks. Hästi kiirete protsesside puhul on ka mõeldav, et soojuskadused võib ajutiselt üldse ignoreerida.

Kõige probleemsem aspekt on takistuse sõltuvus temperatuurist. Elektri juhtide takistuse või eritakistuse sõltuvust temperatuurist kitsas temperatuurivahemikus kirjeldatakse harilikult lineaarse temperatuuriparandiga:

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)],$$

kus R_0 on takistus temperatuuril T_0 (näiteks toatemperatuuril). Suuremas temperatuurivahemikus (hõõglambi puhul mitu tuhat kraadi) oleks mõistlik arvesse võtta juba ka üks kõrgemat järku parandusliige, näiteks

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2].$$

Paraku selliste seoste baasil on lihtsate ülevaatlike analüütiliste tulemuste saamine keeruline. Mõnikord võib piirduda ka hästi jämeda mudeliga, kus metalli takistus võetakse võrdeline absoluutse temperatuuriga. Näitena joonisel 34 on kujutatud reaalne sõltuvus volframi jaoks.

42 Näidake, et kui hõõgniidi takistus võtta võrdeline absoluutse temperatuuriga, siis hõõglambi voltamperkarakteristik on $I \propto U^{3/5}$.

43 Hõõglambi soklile on kirjutatud: 26 V 0,12 A. Toatemperatuuril mõõdeti hõõgniidi takistuseks $R_0 = 24 \Omega$. Hinnake hõõgniidi pikkust l , diameetrit d ja töörežiimi temperatuuri T ! Hõõgniit on valmistatud volframist, mille eritakistus toatemperatuuril on $\rho_0 = 5,3 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$.

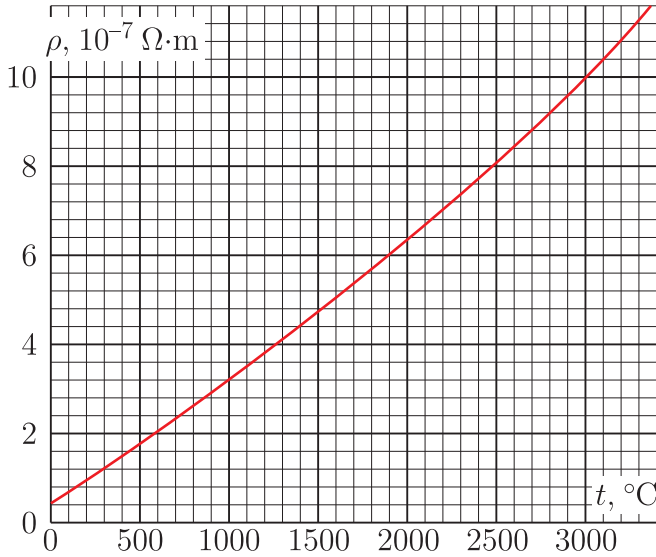
Vastus: $l \approx 12$ cm, $d \approx 5,8 \mu\text{m}$, $T \approx 2650$ K.

44 Halogeenlambi pirni hõõgniidi pikkus on 5 cm. Hõõgniit on valmistatud volframtraadist, mille tiheduse 19300 kg/m^3 ja erisoojuse 134 J/(kg K) võib lugeda meid huvitavas temperatuuride vahemikus konstantseks. Volframi eritakistuse sõltuvus temperatuurist on toodud joonisel 34. Pirnile lülitatakse kogemata liiga suur alalispinge 120 V. Kui kaua võtab aega volframi sulamistemperatuuri 3410°C saavutamine?

2 Kondensatoreid sisaldavad alalisvooluahelad

2.1 Elementaarteadmised

Kondensator on põhimõtteliselt kahest elektroodist ja neid eraldavast õhukesest dielektrikukihist koosnev komponent,



Joonis 34: vt ülesanne 44.

mis on disainitud põhimõttel, et antud potentsiaalide vahe U juures õnnestuks elektroodidel talletada võimalikult suured vastasmärgilised elektrilaengud $\pm Q$. Q on võrdeline U -ga: $Q = CU$, kus võrdetegurit C nimetatakse kondensaatori *mahtuvuseks*. Laengut transpordib ühelt elektroodilt teisele elektrivool: $I = dQ/dt$. Kuivõrd voolutugevus on lõplik, siis kondensaatori laeng ja pinge ei saa hetkeliselt muutuda. Nii siis kondensaatori käitumist kirjeldab üldjuhul järgmine võrand:

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dU}{dt}. \quad (1)$$

Tänu elektrostaatilisele vastastikmõjule laengute $+Q$ ja $-Q$ vahel on laetud kondensaatorisse kätketud teatav kogus elektrienergiat. Kui kondensaatori pinge on parajasti U , siis laengu ΔQ ületõstmisel negatiivse laenguga elektroodilt positiivsele tuleb teha tööd $U\Delta Q$, järelikult laetud kondensaatori kogu potentsiaalne energia on

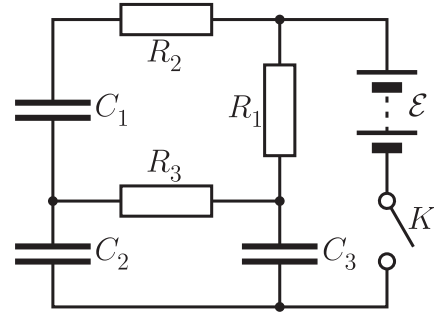
$$\Pi = \int_0^Q U dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

Nagu selgub elektrostaatikas (jaotis 3.9), kui elektroodidevaheline kaugus d on ühtlane ja hulga väiksem elektroodide mõõtmetest (nii et ääre-efektid on tühiised), siis kondensaatori mahtuvus avaldub valemiga $C = \epsilon\epsilon_0 S/d$, kus S on katete pindala ja ϵ on elektroode eraldava keskkonna dielektriline läbitavus (vaakumis/õhus $\epsilon \simeq 1$).

45 Joonisel 35 toodud elektriskeemis on kõik kondensaatorid algselt ilma laenguta. a) Leidke voolutugevus läbi patarei vahetult pärast lüliti K sulgemist! b) Millised saavad olema kõikide kondensaatorite laengud pärast statsionaarse olukorra väljakujunemist?

2.2 Energia ja elektrilaengu jäävus

On hulk olukordi, kus kondensaatoreid sisaldavas elektriahes toimub teatava lõpliku koguse elektrilaengute ümberpaiknemine mõnesuguse karakterse aja vältel (näiteks pärast lüliti avamist või sulgemist). Passiivset skeemielementi (takistit,



Joonis 35: vt ülesanne 45.

diodi vms) läbib sellise siirdeprotsessi käigus teatav vooluimpulss ja elemendil eraldub mõnesugune lõplik soojushulk. Põhimõtteliselt on mõeldav tuletada voolutugevuse I ja pingelanguga U sõltuvus ajast (vt nt jaotis 2.4) ja seejärel integreerida hetkvõimsust UI (või lineaartakisti puhul I^2R). Enamikes sellistes olukordades on hoopis mõttekam kasutada energia jäävuse seadust piisavalt üldisel kujul:

$$\Pi_{\text{alg}} + A = \Pi_{\text{lõpp}} + Q, \quad (2)$$

kus Π_{alg} on kondensaatori(te) algne potentsiaalne energia, $\Pi_{\text{lõpp}}$ on potentsiaalne energia pärast vooluimpulsi lakkamist, A on mitmesuguste kõrvaljõudude poolt tehtav töö ja Q on protsessi vältel vabanenud soojushulk passiivsetel elementidel. Tuletame eelnevast meelde, et elektromotoorjõu allikas \mathcal{E} teeb laengu q ümberpaigutamisel tööd $\mathcal{E}q$ ning konstantse pingelanguga U elemendil (nt joonisel 25 kujutatud mudelit järgival diodil) eraldub soojusena energiahulk Uq . On ka mõeldav, et vool kulgeb läbi elektromotoorjõu allika tagurpidi, siis tehtud töö on ilmselt negatiivne. Kui on mitu takistit järjestikku, siis eraldunud soojushulgad jaotuvad neil vastavalt takistusele, sest soojusvõimsus I^2R on igal hetkel takistusega võrdeline.

Kui elektriskeemi saab jagada sellisteks osadeks, mis on üksteisest laengu ülekande mõttes isoleeritud, siis summaarne laeng igal sellisel skeemiosal on konstantne. See idee võib osutada kasulikuks selliste skeemide analüüsimisel, mis sisaldavad mitut kondensaatorit.

46 Järjestikku lülitatud takistist R ja kondensaatorist C koosnevale ahelale lülitatakse alalispingeallikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} . Kondensaator oli eelnevalt laadimata. Leidke takistil eralduv soojushulk.

Vastus: $Q = C\mathcal{E}^2/2$.

47 Kondensaator mahtuvusega $C = 10 \mu\text{F}$ on laetud pingeni $U_0 = 6 \text{ V}$. Lülitati abil suletakse vooluring, mis koosneb sellest kondensaatorist ja diodist, mille voltamperkarakteristik on näha joonisel 25 (antud ülesandes võtame $U_d = 1 \text{ V}$). Kui suur energia eraldub lüliti juures sähvatusena (so kaarlahendusena), kui soojuste eraldumisega juhtmetes võib mitte arvestada?

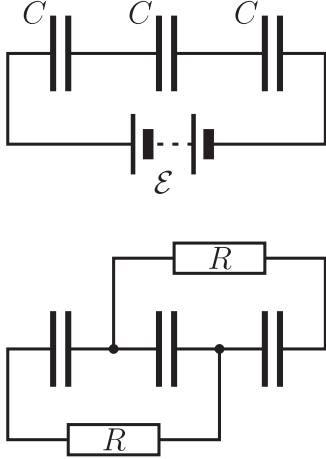
Vastus: $Q \approx 125 \mu\text{J}$.

48 Näidake, et kondensaatorite järjestikühenduse mahtuvus avaldub valemiga

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right)^{-1}.$$

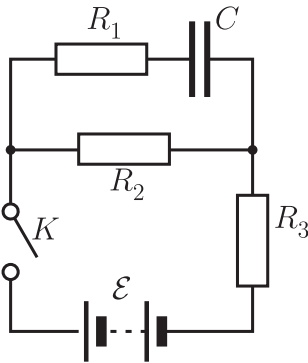
49 Kolm ühesugust laadimata kondensaatorit mahtuvusega C on ühendatud jadamisi. Sellele ahelale lülitatakse alalispingeallikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} . Kui kondensaatorid on täielikult laadunud, ühendatakse pingeallikas lahti. Seejärel ühendatakse ahelasse samaaegselt kaks ühesugust takistit R nõnda nagu kujutatud joonisel 36. Kui suur soojushulk eraldub kummalgi takistil?

Vastus: $Q = 2C\mathcal{E}^2/27$.



Joonis 36: vt ülesanne 49.

50 Joonisel 37 kujutatud elektriskeemis lüliti K on olnud pikemat aega avatud. Kui suur soojushulk eraldub takistil R_1 pärast lüliti sulgemist? Vihje. Siin läheb vaja ka ideed jaotisest 1.3.



Joonis 37: vt ülesanne 50.

2.3 Mehaaniline töö

Mõningates olukordades on energiabilansis (võrrand 2) mängus ka mehaaniline töö kujul $F\Delta x$, kus rakendatud jõu F toimel leiab aset mehaaniline liikumine Δx (nt kondensaatori katetevahelise kauguse muutumine). See liikumine ei pruugi olla üldse tõeline, vaid sooritatakse mõtteliselt, et analüüsida süsteemi energiabilanssi (mehaanikast tuntud *virtuaalse nihke meetod*). Liikumise Δx käigus leiavad siis ilmselt aset ka teatud elektrilised, soojuslikud vms muutused süsteemis, mis tuleb kõik arvesse võtta energia jäävuse võrrandi kirja panekuks. Juhul kui süsteemi olekut iseloomustab teatud potentsiaalne energia $\Pi(x)$ ja dissipatsiooni ei esine, siis ilmselt $F\Delta x = -\Delta\Pi$, millest $F = -d\Pi/dx$. Kui süsteemil on

rohkem kui üks liikumisvabadusaste, siis $F_x = -\partial\Pi/\partial x$ väljendab jõu \mathbf{F} seda komponenti, mis mõjub koordinaadi x sihis. Kui on juhtumisi tegemist mehaanilise tasakaaluga, siis ilmselt $F_x = 0$ ehk $\partial\Pi/\partial x = 0$, st süsteemi potentsiaalne energia saavutab tasakaaluasendis miinimumi.

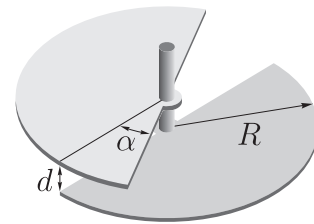
Üldjuhul x ei pruugi isegi väljendada süsteemi lineaarset mõõdet, vaid seda võib käsitleda kui *üldistatud koordinaati*. Vastavalt ka F tuleb vaadelda kui *üldistatud jõudu*. Kui x väljendab lineaarset mõõdet, siis F on harilik jõud (njuutonites), kui aga x väljendab pöördenurka, siis F on jõumoment vastava telje suhtes. Virtuaalse nihke meetodi üks kõige olulisemaid rakendusi on sellistes ülesannetes, kus on mängus kondensaatori ääre-efektid (vt ül. 52, 53, 54, 110). See meetod võimaldab need ülesanded lahendada ilma, et oleks tarvis detailselt teada elektrivälja ja laengute jaotust ruumis, mis võib olla väga keeruline.

51 Kaks tasaparalleelset metallplaati pindalaga 100 cm^2 asetsevad üksteisest kaugusel 1 mm . Plaadid ühendatakse alalispingeallikaga, mille pinge on 12 V . Kui suur jõudu on vaja rakendada, et plaate paigal hoida? Märkus. Kasutage ülesande lahendamisel kahte erinevat mõttekäiku: ühel juhul on pingeallikas püsivalt ühendatud, teisel juhul pärast kondensaatori täislaadimist ühendatakse pingeallikas lahti. Vastus peab tulema mõistagi sama.

Vastus: $F \approx 6,4\ \mu\text{N}$.

52 Kondensaatori moodustavad kaks poolringi kujulist tasaparalleelset plaati, mis saavad hõõrdevabalt pöörelda ühise telje ümber (vt joon. 38). Plaatide vahekaugus on d ja raadius R ($d \ll R$). Leidke pöördemoment, millega alumine plaat mõjub ülemisele plaadile, kui plaatide kattumisenurk on α ($\alpha \gg d/R$) ja plaatidele on rakendatud pinge U .

Vastus: $M = \varepsilon_0 R^2 U^2 / (4d)$.



Joonis 38: vt ülesanne 52.

53 Leidke jõud, millega dielektrikust plaati tõmmatakse plaatkondensaatori katete vahele, kui plaadi laius on a , plaadi paksus d on võrdne katete vahekaugusega, plaadi dielektriline läbitavus on ε ning kondensaatorile on rakendatud pinge U .

Vastus: $F = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 a U^2 / (2d)$.

54 Plaatkondensaatori moodustavad kaks vertikaalset tasaparalleelset plaati, mille vahekaugus on d . Plaatide vahele on rakendatud pinge U . Kondensaator asetatakse alumist serva pidi vedelikku, mille dielektriline läbitavus on ε ja tihedus ρ . Kui kõrgele tõuseb vedelik kondensaatori plaatide vahel? Pindpinevusega mitte arvestada.

Vastus: $h = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 U^2 / (2d^2 \rho g)$, kus g on raskuskiirendus.

2.4 Karakterne aeg

Olgu kondensaator mahtuvusega C laetud pingeni U_0 . Hakame seda tühjaks laadima üle takisti R . Ilmselt

$$RI + U = 0 \quad \text{ehk} \quad RC \frac{dU}{dt} + U = 0.$$

See on esimest järku diferentsiaalvõrrand, mille lahendi saab leida muutujate eraldamise teel:

$$U(t) = U_0 e^{-t/RC}.$$

Olgu nüüd samasse ahelasse lülitatud veel ka elektromotoorjõu allikas \mathcal{E} , mis hakkab kondensaatorit laadima üle takisti R . Seda olukorda võib vaadelda kui superpositsiooni statsionaarsest seisundist, kus $U = \mathcal{E}$, ja olukorrast, kus $\mathcal{E} = 0$, mida kirjeldabki viimane valem, seega

$$U(t) = \mathcal{E} + (U_0 - \mathcal{E})e^{-t/RC}.$$

RC rööpahela korral tulevad avaldised põhimõtteliselt samasugused (st üks liige sisaldab alati tegurit $e^{-t/RC}$). Niisiis RC ahel läheneb statsionaarsele olekule eksponentsiaalselt ja seda iseloomustab karakterne ajakonstant $\tau = RC$.⁷

Oletagem nüüd, et RC -ahelat sisaldavas vooluringis toimuvad pinge- või voolukõikumised (näiteks eelnevas arvutuses võime muuta U_0 sõltuvaks ajast). Selle protsessi kiirust iseloomustab mõnesugune karakterne aeg T (nt vönkeperiood). Kui $T \gg \tau$, on tegemist kvaasistatsionaarse olukorraga, sest RC -ahel jõuab aja T vältel ammu relakseeruda. Aeglaselt muutuva voolu seisukohast on kondensaatori juures ahel katkestatud. Kui $T \ll \tau$, võib pingeid ja voolu vaadelda aeglaselt muutuva (alalis-) komponendi ja kiirelt muutuva (vahelduv-) komponendi superpositsioonina ning arvestada, et kiire vahelduvkomponendi jaoks on kondensaatori takistus väike võrreldes takistusega R . Kondensaatori pinget hakkab kõikumama amplituudiga, mis on hulga väiksem pinget keskmisest väärtusest.

55 Kondensaatori katetevaheline ruum on täidetud isolaatoriga, mille suhteline dielektriline läbitavus on 5 ja eritakistus $10^{12} \Omega \cdot \text{m}$. Leidke karakterne aeg, mille jooksul laetud kondensaator iseeneslikult tühjeneb.

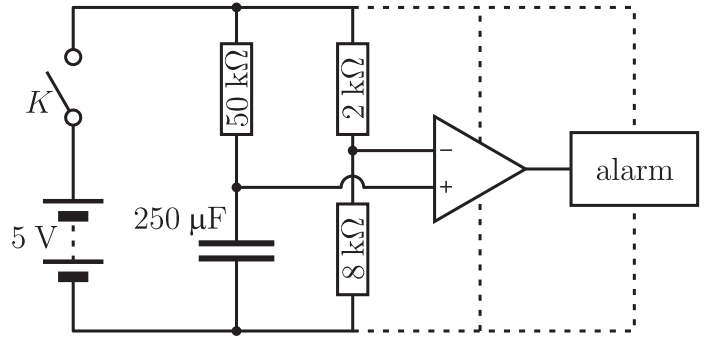
Vastus: $\tau \sim 50 \text{ s}$.

56 Joonisel 39 on kujutatud lihtsa taimeri skeem. Võib eeldada, et komparaatori sisendid praktiliselt voolu ei tarbi. Algselt on kondensaator laadimata. Kui kaua läheb aega pärast lüliti sulgemist kuni alarm tööle hakkab?

Vastus: $t = 20 \text{ s}$.

57 Leidke kondensaatori laadumise karakterne aeg joonisel 37 kujutatud skeemis pärast lüliti K sulgemist.

⁷Teeme siinkohal lühikese kokkuvõtte kahest diferentsiaalvõrrandist (DV), mida füüsikas väga sageli vaja läheb. Olgu sõltuvaks muutujaks x ja tähistagem tuletist punktiga sümboli kohal ($\dot{x} \equiv dx/dt$ ja $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$). DV $\tau \dot{x} + x = 0$ üldlahendiks on $x(t) = Ce^{-t/\tau}$, kus C on integreerimiskonstant, mis tuleb määrata algtingimustest (nt kondensaatori algaeng vms). Teine tuntud DV on $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, mille üldlahendiks on harmooniline vönkumine kujul $x(t) = C_1 \sin(\omega t + C_2)$ või $C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)$. Need kaks DV-d on homogeenid ja lineaarsed, st kõik liikmed sisaldavad vaid funktsiooni $x(t)$ või selle tuletist esimeses astmes. DV-te teoorias näidatakse, et vastava mittehomogeense DV $\tau \dot{x} + x = f(t)$ või $\ddot{x} + \omega^2 x + x = f(t)$ üldlahendiks on homogeenne võrrandi üldlahendi ja mittehomogeense DV mingi erilahendi summa. Juhul kui $f(t) = \text{Const} = f$, siis erilahendiks on $x(t) = f$.

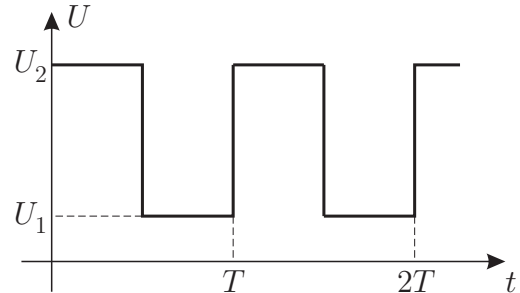


Joonis 39: vt ülesanne 56. Kolmnurga-sarnase tingmargiga element on komparaator — see on lülitus, mis väljastab signaali (mis omakorda käivitab alarmi) niipea kui selle sisendite potentsiaalide vahe muutub positiivseks. Kriipsjooned annavad mõista, et komparaator ja alarm vajavad ka toitevoolu, kuid see teadmine ei ole vajalik ülesande lahendamiseks.

$$\text{Vastus: } \tau = \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) C.$$

58 Järjestikku lülitatud takistist ja kondensaatorist koosnevale ahelale lülitatakse joonisel 40 näidatud kujuga vahelduvpinge. Leidke takistil eralduv võimsus järgmistel juhtudel: a) $T \ll RC$; b) $T \gg RC$.

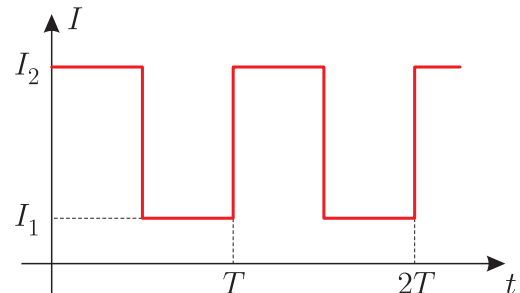
Vastus: a) $P = (U_2 - U_1)^2 / 4R$; b) $P = C(U_2 - U_1)^2 / T$.



Joonis 40: vt ülesanne 58.

59 RC rööpahelat läbib vool, mis sõltub ajast selliselt nagu näidatud joonisel 41. Leidke kondensaatori pingekõikumiste amplituud järgmistel juhtudel: a) $T \ll RC$; b) $T \gg RC$.

Vastus: a) $(I_2 - I_1)T / 8C$; b) $(I_2 - I_1)R / 2$.

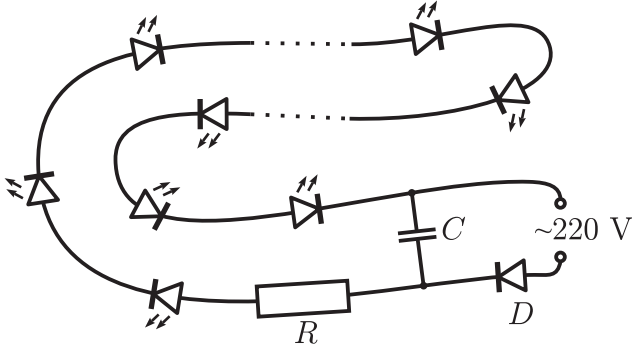


Joonis 41: vt ülesanne 59.

60 Lihtsa jõulukaunistuse valmistamiseks ühendati järjestikku 50 valgusdiodi. Seda ahelat toidetakse läbi alaldusdiodi D otse 220 V võrgupingega (joon. 42). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti R ning voolu pulsatsiooni väljasilu-

miseks kondensaator C . Pingelang alaldusdoodil on tühine, igal valgusdoodil aga 3 V. a) Kui suure takistuse ja võimsusega tuleks valida takisti R , nii et maksimaalne voolutugevus läbi valgusdoodide oleks 20 mA? b) Hinnanguliselt kui suure mahtuvusega kondensaator kindlustab, et valgusdoodide läbiva voolu muutlikkus jääb 5% piiresse? Võrgusagedus on 50 Hz.

Vastus: a) 8 k Ω ja 3,2 W; b) 50 μ F.



Joonis 42: vt ülesanne 60.

3 Elektrostaatika

3.1 Elementaarteadmised

Lihtsaimad elektrostaatika probleemid on seotud üksikute paigalseisvate elektrilaengute vahelise vastastikmõjuga vaakumis. Vastavalt *Coulomb'i seadusele* kahe punktlaengu q_1 ja q_2 vahel mõjub elektrostaatiline jõud tugevusega $F = k_e q_1 q_2 / r^2$, kus r on laengute vahekaugus ja k_e on mõõtühikute süsteemi valikust sõltuv võrdetegur.⁸ See jõud on suunatud piki laenguid ühendavat sirget. Siin q_1 , q_2 ja F on kõik algebralised suurused ning jõu positiivne väärtus tähendab tõukumist. Nagu näitab katse, kehtib seejuures *superpositsiooniprintsiip*, kus paarikaupa arvatud jõud tuleb vektoriaalselt liita leidmaks antud laengule mõjuvat resultantjõudu.

Vastastikmõju elektrilaengute ja -voolude vahel kandub edasi elektromagnetväljaks nimetatava meediumi vahendusel. Elektrostaatikas on oluline selle üks komponent, *elektrivälja* \mathbf{E} , mis on defineeritud kui ühikulise suurusega proovilaengule mõjuv jõud antud ruumipunktis (samuti vektoriaalne suurus). Näiteks äsja sõnastatud Coulomb'i seaduses laeng q_1 tekitab laengu q_2 asukohas välja $\mathbf{E} = k_e q_1 \hat{\mathbf{r}} / r^2$ ja see omakorda avaldab laengule q_2 jõudu $\mathbf{F} = \mathbf{E} q_2$.

Elektrivälja on mugav visualiseerida jõujoone mõiste kaudu. Elektrivälja *jõujoonteks* nimetatakse kõveraid, millele elekt-

rivektor \mathbf{E} on igas punktis puutujaks. Jõujooned algavad positiivsetel ja lõpevad negatiivsetel laengutel. Kvantitatiivsed seosed on järgmised: punktlaengust lähtuvate jõujoonte arv on võrdeline selle laengu suurusega q ning jõujoonte tihedus (st jõujoontega risti asetatud ühikpinda läbivate jõujoonte arv) on võrdeline välja tugevusega E .

61 Neli identset punktlaengut suurusega q paiknevad ruudu tippudes, kus ruudu küljepikkus on L . Leidke laengutele mõjuva jõu suurus.

Vastus: $F = (1 + 2\sqrt{2})q^2 / (8\pi\epsilon_0 L^2)$.

62 Kella numbrilauale on fikseeritud punktlaengud suurusega $q, 2q, 3q, \dots, 12q$ ($q > 0$), mis paiknevad vastavatel tunnijaohtidel. Millist aega näitab tunniosuti hetkel, kui ta on paralleelne ja samasuunaline nende laengute poolt tekitatud resultantväljatugevuse vektoriga numbrilaua tsentris? *Vihje.* Kasutage sümmeetriat ning asjaolu, et vektorite summa ei sõltu liidetavate järjekorrast (liitmise kommutatiivsus ja assotsiatiivsus).

Vastus: 15 : 30

63 Kaks punktlaengut q_1 ja q_2 asetsevad üksteisest kaugusel L . Kuhu tuleks paigutada kolmas laeng ja milline peaks olema viimase suurus, nii et kaks esimest laengut oleks tasakaalus? *Vihje.* Et selle ülesande jaoks üldvastust välja kirjutada, tuleb defineerida laengute asukohti määrav koordinaattelg ning seejärel hoolikalt jälgida märkide reegleid Coulomb'i seaduses.

64 Kahe ühesuguse fikseeritud punktlaengu vahele on paigutatud kolmas punktlaeng. Kas viimane jääb stabiilsesse tasakaalu kui selle laeng on erinimeline võrreldes äärmiste laengutega? *Märkus.* Tasakaalu stabiilsus tähendab, et väikesel kõrvalekaldel tasakaaluasendist tekib resultantjõud, mis suunab keha tasakaaluasendi poole tagasi. Teisisõnu, jõu tuletis nihkekoordinaadi järgi on negatiivne.

65 Kaks identset punktlaengut suurusega q asetsevad üksteisest kaugusel $2d$. Leidke elektrivälja maksimaalne tugevus neid laenguid ühendava sirglõigu keskrisirgel. *Märkus.* Kui kujutada sõltuvust $y = f(x)$ graafiliselt, siis graafiku punktis, kus $f(x)$ omandab maksimaalse väärtuse, on graafiku puutuja hetkeks horisontaalne, st selle tõus on null ehk $f'(x) = 0$.

3.2 Gaussi teoreem

Kõige lihtsamat tüüpi on sellised elektrostaatika ülesanded, kus laengute ruumiline paigutus on etteantud ja küsitakse elektrivälja tugevust laenguid ümbritsevas ruumis. Coulomb'i seaduse ja superpositsiooniprintsiibi najal võib põhimõtteliselt selliste ülesannete vastused alati välja kirjutada. Elektrivälja tugevus ruumipunktis \mathbf{r} avaldub järgmiselt:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad (3)$$

kus \mathbf{r}_i on punktlaengu q_i kohavektor. Ühikvektor $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ määrab laengu q_i elektrivälja suuna punktis \mathbf{r} . Pideva laengujaotuse korral asendub summa integraaliga, mille väljaarvutamine ei pruugi olla triviaalne. Mitmetel erijuhtudel, mida me edaspidi vaatleme, on võimalik vastus leida märksa lihtsamal viisil kasutades *Gaussi teoreemi*.

⁸Magnetostaatikas eksisteerib analoogiline seadus (Ampere'i seadus) elektrivoolude vastastikmõju kohta. Nimelt kahe paralleelse sirgvoolu I_1 ja I_2 vahel mõjub pikkusühiku kohta jõud suurusega $F/L = 2k_m I_1 I_2 / r$, kus k_m on järjekordne võrdetegur (Coulomb'i ja Ampere'i seadustes laeng ja voolutugevus on mõistagi seotud, $I = dq/dt$). Katse näitab, et $k_e/k_m = c^2$, kus c on valguse kiirus vaakumis. Niisiis vaid üks võrdeteguritest on vabalt valitav. Gaussi elektriühikute süsteemis võetakse $k_e = 1$. Seevastu SI süsteemis võeti aluseks olemasolev, praktikas mugav voolutugevuse ühik "amper". Selle tulemusena $k_m = 10^{-7} \text{ N/A}^2$ (täpselt) ja $k_e \approx 8,99 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$. Avaldiste ratsionaliseerimise eesmärgil esitatakse need võrdetegurid SI süsteemis kujul $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ ja $k_m = \mu_0/4\pi$. Seetõttu näiteks edaspidi vaatluse alla tulevates Gaussi seaduses ja tsirkulatsiooniteoreemis tegurit 4π enam ei figureeri.

Gaussi teoreemi on mugav selgitada jõujoone mõiste kaudu. Püüame eespool sõnastatud väited jõujoonte kohta koondada ühte valemisse. Ümbritseme punktlaengu q kinnise pinnaga S . Jõujoonte arv, mis läbib pinnaelementi suurusega ΔS , on ilmselt võrdeline korrutisega $E_n \Delta S$, kus E_n on väljatugevuse komponent pinnanormaali sihis. Pinna S kaudu väljuvate jõujoonte koguarv on niisiis

$$\sum E_n \Delta S \rightarrow \oint_S E_n dS,$$

kus me oleme läinud piirile $\Delta S \rightarrow 0$.⁹ Ringike integraali märgi peal rõhutab, et integreerimine toimub üle terve kinnise pinna. Kuivõrd jõujoonte koguarv on määratud laengu suurusega q , siis selle integraali väärtus ilmselt ei sõltu pinna S valikust. Integraali väljaarvutamiseks vaatleme erijuhtu, kus pinnaks S on valitud kontsentriiline sfäär raadiusega r . Siis Coulomb'i seadusest $E_n = E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2) = \text{Const}$ ja

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Ei ole raske läbi näha, et see võrdus jääb kehtima mistahes laengute paigutuse korral, seega üldiselt

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

kus q_i on laengud, mis on hõlmatud pinnaga S (Q on summaarne laeng). Elektrivälja normaalkomponent $E_n = \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ on märgiga suurus. Kui jõujooned väljuvad läbi pinna S , siis $E_n > 0$, vastasel korral $E_n < 0$. Paneme veel tähele, et kui $Q = 0$, siis \mathbf{E} ei pruugi võrduda nulliga, sest \mathbf{E} võib olla tingitud väljaspool vaatlusalust ruumipiirkonda paiknevate laengute poolt, kui aga kogu pinna S ulatuses $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, siis ka $Q = 0$. Gaussi teoreem on eeskätt kasulik peegel-, tsentraal- või telgsümmeetrilise laengujaotusega kehade (tasand, kera, silinder jms) väljatugevuse arvutamisel. Nimetatud juhtumitel on meil sümmeetriakaalutlustest ette teada, milline on elektrivälja vektori siht igas ruumipunktis. Kavalus seisneb pinna S sellises valikus, et pindintegraali arvutamine oleks triviaalne, st et pinna S ulatuses oleks vähemalt tükati $E_n = \text{Const}$.

Märgime, et Coulomb'i seaduse ja Newtoni gravitatsiooniseaduse matemaatilise sarnasuse tõttu on Gaussi teoreem kehtiv ka gravitatsioonivälja jaoks, nimelt

$$\oint_S g_n dS = -4\pi GM,$$

kus M on pinnaga S ümbritsetud aine mass ja \mathbf{g} on gravitatsioonivälja tugevus (st ühikulise massiga kehale mõjuv jõud ehk raskuskiirendus). Miinusmärk on tingitud sellest, et positiivsed massid tõmbuvad.

66 Tõestage, et ei ole võimalik tekitada sellist elektrostaatiliselt välja, milles punktlaeng jääks stabiilsesse tasakaalu. *Vihje.* Tõestus tuleneb otseselt stabiilse tasakaalu definitsioonist.

67 Leidke ühtlaselt laetud lõpmatu tasandi poolt tekitatav väli. Laengu pindtihedus on σ .

Vastus: $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

68 Leidke plaatkondensaatori poolt tekitatav väli ning katele mõjuv jõud pinnaühiku kohta (elektrostaatiline rõhk).¹⁰ Laengu pindtihedus katetel on $\pm\sigma$.

Vastus: Katetevahelises ruumis $E = \sigma/\epsilon_0$, väljaspool $E = 0$; $p = \sigma^2/2\epsilon_0$.

69 Ilusa ilmaga on Maa pinna läheduses allapoole suunatud elektrivälja tugevusega ligikaudu 150 V/m. Väljatugevus kaha-neb kõrgusega ja on 100 m kõrgusel umbes 100 V/m. Leidke elektrilaengu keskmine ruumtihedus atmosfääris!

Vastus: $\rho \approx 4,4 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$.

70 Leidke peenikese, sirge ja lõpmata pika traadi poolt tekitatav elektrivälja tugevus kaugusel r traadist, kui laengu joontihedus piki traati on λ .

Vastus: $E = \lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$.

71 Tõestage, et ühtlaselt laetud sfääri sisemuses elektrivälja puudub.

72 Leidke elektrivälja tugevus kaugusel r ühtlaselt laetud kera keskpunktist. Laengu ruumtihedus on ρ ja kera raadius R .

Vastus:

$$E(r) = \begin{cases} \rho r/(3\epsilon_0) & \text{kui } r < R \\ \rho R^3/(3\epsilon_0 r^2) & \text{kui } r \geq R \end{cases}.$$

73 Leidke elektrivälja tugevus kaugusel r lõpmata pika, ühtlaselt laetud silindri teljest. Laengu ruumtihedus on ρ ja silindri raadius R .

Vastus:

$$E(r) = \begin{cases} \rho r/(2\epsilon_0) & \text{kui } r < R \\ \rho R^2/(2\epsilon_0 r) & \text{kui } r \geq R \end{cases}.$$

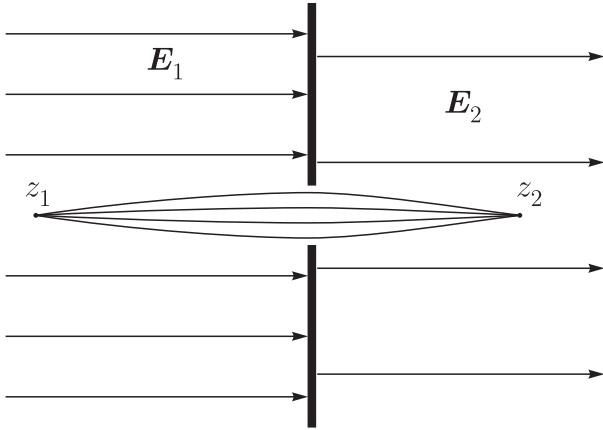
74 Õhukeses tasapinnalises elektroodis on ümmargune avaus raadiusega a . Elektroodist ühele poole jäävas poolruumis (avast eemal) on homogeenne elektrivälja \mathbf{E}_1 , teiselpool elektroodi on homogeenne elektrivälja \mathbf{E}_2 (joonis 43). Elektronide kimp on fokuseeritud avause teljel paiknevasse punkti kaugusel z_1 elektroodist. Pärast avause läbimist koondub osakeste kimp teiselpool elektroodi kaugusel z_2 . Osakeste energia $eU_0 \gg eE_1 z_1, eE_2 z_2$ ja $a \ll z_1, z_2$. Näidake, et sellistel tingimustel kehtib "läätsse valem" kujul $1/z_1 + 1/z_2 = (E_1 - E_2)/4U_0$. *Juhtnõör.* Avauses vahetus läheduses on väli tugevalt mittehogeenne. Elektrivälja radiaalsihilise komponendi hindamiseks selles piirkonnas rakendage Gaussi teoreemi lühikesele koaksiaalsele silindrile, mis läbib avaust.

3.3 Superpositsiooniprintsiip

Väljade superpositsiooni esindab valem 3: laengute süsteemi poolt antud ruumipunktis tekitatud elektrivälja tugevus on võrdne nende väljatugevuste vektorsummaga, mida tekitaksid süsteemi kuuluvad laengud üksikuna. Vaajadusel võib mängu tuua ka paarikaupa võrdvastasmärgilisi fiktiivseid laenguid või laengujaotuseid, nii et summaarne laengujaotus (ja resulteeriv elektrivälja) ruumis jääb muutumatuks. Näiteks nullise laengutihedusega ruumipiirkonda võib vaadelda kui kahe

⁹Sellist integraali nimetatakse vektori \mathbf{E} vooks läbi pinna S . Seda mõistet võib rakendada mistahes vektorväljale. Näiteks kui me uurime vedeliku voolamist ja \mathbf{E} asemel oleks vedelikuosakese kiirusvektor \mathbf{v} , siis integraal $\int v_n dS$ annaks vedelikuvoo (m^3/s) läbi pinna S .

¹⁰Siin ja edaspidi (kui pole teisiti märgitud) eeldame, et plaatkondensaatori katete mõõtmed on hulga suuremad nende vahekaugusest.

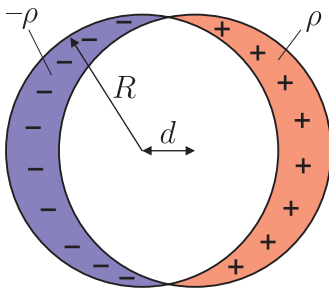


Joonis 43: vt ülesanne 74.

võrdvastasmärgilise laengujaotuse superpositsiooni. Siin on teatud analoogia mehaanikaga, kus sarnast ideed rakendatakse õõnsate kehade masskeskme leidmisel.

75 a) Määrake elektrivälja õõnsuses, mis moodustub kahe ühtlaselt laetud kera lõikumisel (joon. 44). Laengu ruumtihedus ühes kera on ρ ja teises $-\rho$, mõlema kera raadius on R ning nende tsentrite vahekaugus on d . **b)** Lahendage sama ülesanne kui tegemist on kahe lõpmata pika paralleelse silindriga.

Vastus: a) $\mathbf{E} = \rho\mathbf{d}/(3\epsilon_0)$, b) $\mathbf{E} = \rho\mathbf{d}/(2\epsilon_0)$ (homogeenne väli).



Joonis 44: vt ülesanne 75.

76 Homogeenselt laetud kera (laengu ruumtihedus ρ) sisemuses on sfääriline õõnsus, mille keskpunkti asukoht kera tsentri suhtes on \mathbf{r}_0 . Leidke elektrivälja õõnsuses.

Vastus: $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho\mathbf{r}_0/3\epsilon_0$ (homogeenne väli).

3.4 Elektridipool

Sageli pakub huvi komplitseeritud laengute süsteemi (nt molekuli) poolt tekitatav elektrivälja suurtel kaugustel (st kaugustel, mis on hulga suuremad süsteemi karaktersest lineaarmõõtmest). Sel juhul on otstarbekas elektrivälja täpne avaldis 3 ritta arendada r järgi, kus r on väljapunkti kaugus laengusüsteemi keskpunktist. On selge, et kui süsteemi kogulaeng $Q = \sum q_i$ on nullist erinev, siis suurtel kaugustel meenutab elektrivälja üsna täpselt punktlaengu välja:

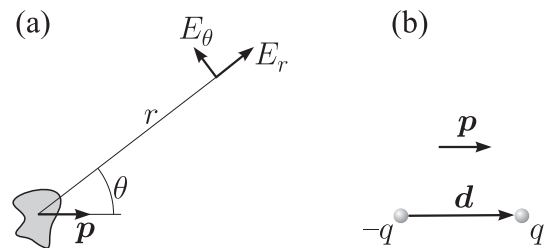
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

mille moodul kahaneb pöördvõrdeliselt r^2 -ga. Neutraalse süsteemi ($Q = 0$) puhul peame rittaarenduses arvesse võtma

juba liiget, mis kahaneb pöördvõrdeliselt r^3 -ga. Polaarkoordinaatides avalduvad selle välja komponendid järgmiselt (joon. 45a):

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (4)$$

kus suurust $\mathbf{p} = \sum q_i \mathbf{r}_i$ nimetatakse laengute süsteemi *dipoolmomentiks*. Niisiis \mathbf{p} iseloomustab seda, kui võrd on positiivsete ja negatiivsete elektrilaengute ruumiline paiknemine süsteemis ebavõrdne või ebasümmeetriline (kuigi süsteem tervikuna on elektroneutraalne). Lihtsaimaks laengusüsteemiks, mille väli avaldub vastavalt valemile 4, on kahest võrdvastasmärgilisest punktlaengust ($\pm q$) koosnev süsteem, kus laengute vahekaugus $d \ll r$. Sellist mudelsüsteemi nimetatakse *elektriliseks dipooliks* ja tema dipoolmoment $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, kus \mathbf{d} on laengust $-q$ laenguni $+q$ tõmmatud vektor (joon. 45b).



Joonis 45: Dipooli elektrivälja polaarkoordinaatides.

77 Leidke väli dipooli teljel ning telje keskristsirgel kaugusel r dipoolist. Veenduge, et valemid 4 annavad sama tulemuse.

Vastus: $\mathbf{E}_\parallel(r) = 2\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, $\mathbf{E}_\perp(r) = -\mathbf{p}/(4\pi\epsilon_0 r^3)$.

78 Tõestage elektrilise dipooli jaoks välja üldavaldis 4. *Juhetöö.* Kasutage ära eelmise ülesande tulemusi vaadeldes meelevaldse orientatsiooniga dipooli kui kahe sobivalt valitud, risti asetseva dipooli superpositsiooni. Sisuliselt tähendab see sobivasse ruumpunkti täiendavate fiktiivsete laengute $\pm q$ lisamist.

79 Plaatkondensaatori moodustavad kaks tasaparalleelset metallplaati pindalaga S . Kondensaator laetakse pingeni U . Leidke elektrivälja tugevus plaatide tasandis kaugusel r , kus r on hulga suurem plaatide mõõtmeist. Kondensaator paikneb vaakumis.

Vastus: $E = SU/(4\pi r^3)$.

80 Leidke elektrilisele dipoolile \mathbf{p} mõjuv pöördemoment, kui dipool on asetatud välisesse elektrivälja \mathbf{E} .

Vastus: $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$; näeme, et väli \mathbf{E} püüab pöörata vektori \mathbf{p} endaga samasuunaliseks.

81 Leidke elektrilise dipooli \mathbf{p} potentsiaalne energia elektriväljas \mathbf{E} .

Vastus: $\Pi = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ (siin energia nullnivoo on välitud nõnda, et $\Pi = 0$ kui $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$, sellest ka miinusmärk).

82 Leidke jõud, mis mõjub elektrilise dipooli \mathbf{p} ja punktlaengu q vahel, kui nende vahekaugus on r ning vektor \mathbf{p} on orienteeritud punktlaengu sihis. *Märkus.* Siin saab kasutada analoogilist arvutuskäiku nagu ülesandes 77. Samas on võimalik ära kasutada ülesande 81 lahendust ja virtuaalse nihke meetodit. See annab vahetulemusena ühe üldisema valemi $F_x = \mathbf{p}(\partial \mathbf{E}/\partial x)$.

83 Leidke kahe dipooli \mathbf{p}_1 ja \mathbf{p}_2 vahel mõjuv jõud, kui dipoo-

lide vaheline kaugus on r !

84 Hinnake polaarsete molekulide pöördvõnkumise sagedust elektriväljas $E = 30 \text{ kV/m}$. Molekuli võib vaadelda kui jäika hantlikujulist moodustist pikkusega $l \sim 0,1 \text{ nm}$ ja massiga $m \sim 10^{-26} \text{ kg}$. Aatomite laengud $\pm q$ võib lugeda mooduli poolest võrdseks elementaarlaenguga ($1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).

$$\text{Vastus: } \nu \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{qE}{2ml}} \approx 1,5 \times 10^{10} \text{ Hz.}$$

3.5 Elektrostaatilise välja energia ja potentsiaal

Elektrostaatiline väli on *konservatiivne* — töö, mida väli teeb laetud osakese nihutamisel piki suletud kontuuri, on null. Ekvivalentselt võib öelda, et töö, mida väli teeb laetud osakese nihutamisel punktist A punkti B , ei sõltu osakese trajektoorigist. See asjaolu võimaldab aditiivse konstandi täpsusega defineerida laengu potentsiaalse energia igas välja punktis. Positiivse ühiklaengu potentsiaalset energiat antud ruumipunktis nimetatakse välja *potentsiaaliks*. Kahe ruumipunkti *potentsiaalide vahe* ehk *pinge* avaldub:

$$\varphi_B - \varphi_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Lubades mõttelist ühikulist suurusega proovilaengut liikuda elektrivälja toimel punktist A punkti B , sooritab väli positiivse töö, seega potentsiaalne energia peab vähenema, sellest ka miinusmärk integraali ees.

Illustreerime öeldut punktlaengu baasil. Harilikult lepitakse kokku, et lõpmatuses on potentsiaal võrdne nulliga. Seega punktlaengu q elektrivälja potentsiaal kaugusel r avaldub

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E(r) dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Nagu näeme, vastus tõepoolest ei sõltu trajektoori valikust. Siinkohal on jällegi kohane märkida analoogiat gravitatsiooni-väljaga. Punktmassi M gravitatsiooniline potentsiaal, st ühikulise massiga keha potentsiaalne energia, avaldub valemi 5 eeskujul järgmiselt:

$$\varphi(r) = - \frac{GM}{r}.$$

Miinusmärk on tingitud sellest, et massid tõmbuvad; kui lõpmatuses on potentsiaalne energia loetud võrdseks nulliga, siis lõplikul kaugusel peab ta olema nullist väiksem.

Jaotise 3.2 tulemuste põhjal võime öelda, et valem 5 on rakendatav ka tsentraalsümmeetrilise laengujaotusega kehade (sfäär, kera) potentsiaali arvutamiseks. Punktis, mis asub kõigist laengutest võrdsel kaugusel (sfääri tsentris, rõnga teljel vms), on potentsiaal arvutatav samuti valemi 5 järgi. Üldisemal juhul võime kirjutada valemi 3 eeskujul

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}.$$

Elektrivälja arvutamisel on mõnikord lihtsam tuletada esmalt potentsiaali avaldis $\varphi(\mathbf{r})$ ja siis sellest elektriväli

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right),$$

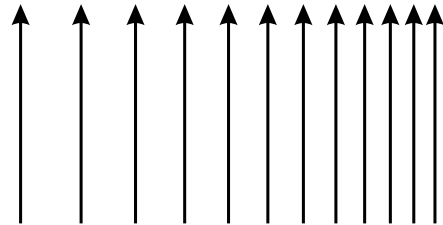
sest potentsiaali arvutamisel tuleb liita skaalareid, elektrivälja arvutamisel aga vektoreid. Kui sümmeetriakaalutlustest on ette teada vektori \mathbf{E} siht (nt rõnga teljel), siis piisab kui arvutame osatuletise ainult selles sihis, ristuvad komponendid tulevad niikuinii nullid.

Punktlaengute süsteemi $\{q_i\}$ elektrostaatilise vastasmõju potentsiaalse energia võib esitada kujul $\Pi = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$, kus φ_i on potentsiaal punktlaengu q_i asukohas, mis on tekitatud kõigi ülejäänud laengute poolt (peale q_i enda). Selles summas interaktsioonid paarikaupa kõikide laengute vahel võetakse arvesse kahekordselt, sellest ka tegur $1/2$. Toodud valem on eriti tulus kui φ_i on ühesugune kõigi laengute jaoks (ühtlaselt laetud sfäär, kondensaator vms).

85 Ruumiosa $0 < x < d$ täidab ühtlaselt jaotunud elektrilaeng tihedusega ρ ($\rho > 0$); laengutihedus ruumiosas $-d < x < 0$ on $-\rho$. Piirkondades $-\infty < x < -d$ ning $d < x < \infty$ laeng puudub. Piirkonnas $x > d$ liigub elektron massiga m ja laenguga $-e$, selle kiirusvektor on suunatud otse laetud kihi poole. Millise minimaalse algkiiruse puhul suudab elektron veel läbida laetud kihid?

$$\text{Vastus: } v_0 = d\sqrt{2\rho e/(\epsilon_0 m)}.$$

86 Kas on võimalik tekitada elektrostaatilist välja, mille jõujooned on kujutatud joonisel 46?



Joonis 46: vt ülesanne 86.

87 Näidake, et ühtlaselt laetud sfääri sisemuses on potentsiaal konstantne ja võrdne sfääri enese potentsiaaliga.

88 a) Näidake, et plaatkondensaatori mahtuvus (vaakumis) avaldub valemiga $\epsilon S/d$, kus S katete pindala ja d katetevaheline kaugus. b) Oletades, et kondensaatori energia kandjaks on plaatide vahel olev elektriväli E , näidake, et viimase energiatihedus on $\epsilon_0 E^2/2$.

89 N ühesugust elavhõbedatilka on laetud ühesuguse potentsiaalini φ_0 . Missuguseks kujuneb suure elavhõbedatilga potentsiaal kõigi väikeste tilkade liitumisel (tilgad lugeda kerakujulisteks)?

$$\text{Vastus: } \varphi = \varphi_0 N^{2/3}.$$

90 Näidake, et elektrilise dipooli \mathbf{p} välja potentsiaal avaldub kujul $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\hat{\mathbf{r}}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$.

91 Kondensaator on moodustatud kahest kontsentrisest metallsfäärist, mille vaheline ruum on täidetud õhuga. Viimase läbilöögitugevus on 30 kV/cm . Välise elektroodi raadius on $R = 0,5 \text{ m}$. Milline tuleb valida sisemise elektroodi raadius, et õnnestuks tekitada võimalikult kõrget potentsiaalide vahet?

Leidke viimase arvuline väärtus.

Vastus: $r = 0,25 \text{ m}$, $U = 3,7 \times 10^5 \text{ V}$.

92 Leidke elektrivälja tugevus laetud rõnga teljel kaugusel x rõnga tasandist. Rõnga raadius on R ning laeng Q on ühtlaselt jaotunud üle rõnga.

Vastus: $E(x) = Qx / [4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}]$.

93 Hinnake elektroni raadiust, oletades et elektroni seisumass ($m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$) on tingitud tema laengu elektrostaatilisest energiast ($\Pi = mc^2$). Lihtsaimas mudelis võib lugeda, et elektroni laeng ($-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) on ühtlaselt jaotunud tema "pinnale".

Vastus: $r = e^2 / (8\pi\epsilon_0 mc^2) \approx 1,4 \times 10^{-15} \text{ m}$.¹¹

3.6 Elektrostaatiline jõud

Koolikursus piirdub Coulomb'i seaduse sõnastamisega punkt-laengute vahel mõjuva elektrostaatilisest jõu arvutamiseks. Selle jõu moodul on $q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. Vaatleme siinkohal mõningaid keerukamaid ülesandeid laengutele või laetud kehadele mõjuva elektrostaatilisest jõu arvutamiseks. Nii nagu eespool elektrivälja arvutamisel, püütakse ka siin võimaluste piires vältida keerukate integraalide arvutamist. Vajalikud ideed on sõnastatud vihjetena iga ülesande juures.

94 Näidake, et tsentraalsümmeetrilise laengujaotusega kera vahel mõjuv jõud avaldub täpselt samuti nagu punktlaengute vaheline jõud, st $Q_1 Q_2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, kus Q_1 , Q_2 on kerade kogulaengud ja r on kaugus nende tsentrite vahel. *Juhtnõör.* 1) Väljaspool kera asuva vaatleja seisukohalt väli ei muutu kui suruda kera kokku punktlaenguks (järglus Gaussi teoreemist). 2) Kehtib Newtoni III seadus: $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

95 Leidke jõud, millega ühtlaselt laetud lõpmata pikk silinder mõjutab ühtlaselt laetud kera. Silindri laeng pikkusühiku kohta on λ , kera laeng on Q ning silindri telje ja kera keskpunkti vaheline kaugus r .

Vastus: $F = Q\lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$.

96 Leidke ühtlaselt laetud sfääri pinnale mõjuv elektrostaatiline rõhk, kui laengu pindtihedus on σ . *Juhtnõör.* Üks võimalus on kasutada virtuaalse nihke meetodit. Kuid saab arutleda ka järgmisel viisil. Võtame vaatluse alla sfääri väikese pinnaelemendi ΔS . Väli E' , mis määrab sellele pinnaelemendile mõjuva jõu, on tekitatud sfääri ülejäänud pindlaengute poolt. Väli, mille tekitab pinnaelement enda vahetus läheduses, on vastavalt ül. 67 lahendusele $\sigma / (2\epsilon_0)$. Selle välja ja välja E' superpositsiooni tulemusena peab väli sfääri sisemuses saama nulliks.

Vastus: $p = \sigma^2 / (2\epsilon_0)$.

97 Leidke jõud, millega ühtlaselt laetud sfääri üks pool mõjub teisele, kui sfääri raadius on R ja laeng Q . *Vihje.* Kasutage ära ül. 96 lahendust ja analoogiat gaasi rõhuga anuma seintele.

Vastus: $F = Q^2 / (32\epsilon_0 R^2)$.

3.7 Juhid elektrostaatilisest väljas

Seni me vaatlesime selliseid ülesandeid, kus laengute paigutus ruumis oli etteantud ja fikseeritud. Viies elektrostaatilisest välja juhi või dielektriku, peame arvestama laengute ümberpaiknemisega aine sisemuses välja toimel. Nendeks laenguteks on juhtides vabad laengukandjad (mis võivad liikuda kogu juhi ulatuses) ja dielektrikutes aatomitega seotud elektronid (mida võib välja rakendamiseks nihutada kõrvale tasakaaluasendest — ainet polariseerida). Sellistes ülesannetes on harilikult teada laengute paigutus väljaspool juhti või dielektrikku, laengute paigutus aines on aga tundmatu.

Juhtidel on elektrostaatika seisukohalt rida huvitavaid omadusi, mis tulenevad vabade laengukandjate olemasolust.

1. Juhi sees elektriväli puudub. Nullist erineva välja korral hakkaksid vabad laengukandjad juhi sees liikuma ja paigutuksid ümber, kuni nende poolt tekitatav väli kompenseerib parajasti välise välja.
2. Ümberpaigutunud laengud kogunevad alati juhi pinnale, mujal on laengu ruumtihedus null.¹² See tuleneb eelmisest omadusest ja Gaussi teoreemist. Järeldus: õõnsuse tegemine juhi sisse ei häiri laengute tasakaalu juhi pinnal.
3. Kuivõrd väli juhi sees puudub, siis potentsiaal peab olema juhi igas punktis ühesugune. Järelikult juht on ekvipotentsiaalkeha ja juhi pind on *ekvipotentsiaalpind*, st elektriväli on juhi pinnaga igas punktis risti. Tõepoolest, vastasel korral hakkaksid vabad laengukandjad piki pinda nihkuma, kuni saavutatakse tasakaal. Siin on analoogia vedeliku pinnaga, mis on ekvipotentsiaalpinna raskusvälja suhtes, st risti raskuskiirenduse vektoriga.

Juhi pinnale indutseeritud vabade laengute tihedus on määratud resultantväljaga juhi pinna vahetus läheduses (Gaussi teoreemi kaudu). Resultantväli on välise välja ja pindlaengute välja superpositsioon. Pindlaengute välja on üldjuhul keeruline siduda laengute pindtihedusega. Ainult tasapinnalise geomeetria puhul on seos pindlaengute välja normaalkomponendi ja laengutiheduse vahel kergesti leitav Gaussi teoreemi abil. Kui seos pindlaengute välja ja laengutiheduse vahel on leitud, siis jääb üle vaid kirjutada välja tingimus, et resultantväli juhi sees (pinna vahetus läheduses) oleks võrdne nulliga.

Juhile antud lisalaeng jaotub mööda selle pinda nii, et juhi kõik punktid saavutavad sama potentsiaali. Juhi *mahtuvuse* all mõistetakse laengut, mis tõstab juhi potentsiaali ühiku võrra. On kerge veenduda, et kera mahtuvus on $4\pi\epsilon_0 R$, kus R on kera raadius. Siit me näeme, et juhi mahtuvus kasvab võrdeliselt tema karakterse lineaarmõõtmega. Küllalt massiivse juhi (nt maakera) mahtuvuse võib sageli lugeda lõpmata suureks, st tema potentsiaal on praktiliselt muutumatu laengute lisamisel või eemaldamisel ja selle võib harilikult lugeda võrdseks nulliga. Mahtuvuse arvutamisel tuleb tähele panna,

¹²Juhi pinnale kogunenud laengud moodustavad seal hästi õhukese kihi, kus väljatugevus muutub monotoonselt nullist kuni \mathbf{E} -ni, kus \mathbf{E} on väljatugevus juhi pinna vahetus läheduses väljaspool juhti. Makroskoopilises mõttes võib selle üleminekukihi paksuse lugeda nulliks ja öelda, et väljatugevus muutub hüppeliselt nullist \mathbf{E} -ni. Järgnevas me räägime sageli ühe või teise välja pidevusest või mittepidevusest keskkondade lahtuspinnal just selles tähenduses. Kui on tarvis leida nende pindlaengute mõjuvat jõudu, võib keskmiseks väljatugevuseks pindkihis lugeda $\mathbf{E}/2$, nagu selgus ülesande 96 lahendamisel.

¹¹Suurust $e^2 / (4\pi\epsilon_0 mc^2) \approx 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ nimetatakse elektroni klassikaliseks raadiuseks.

et juhile antud lisalaeng võib indutseerida muutusi ümbritsevates juhtides, see omakorda mõjutab vaadeldava juhi potentsiaali.

98 Kaks metallkera raadiustega R_1 ja R_2 asuvad teineteisest kaugusel, mis on palju suurem nende raadiustest. Mõlemal keral on ühesugune laeng q . Missugusteks kujunevad kerade laengud, kui ühendada nad juhtmega?

Vastus: $q_1 = 2qR_1/(R_1 + R_2)$, $q_2 = 2qR_2/(R_1 + R_2)$.

99 Lõpmatu ulatusega tasapinnalise juhi kohale kaugusele h juhi pinnast paigutatakse punktlaeng q . Leidke juhi pinnale indutseeritud laengute pindtihedus σ .

Vastus: $\sigma(r) = -qh/(2\pi r^3)$, kus r on juhi pinnapunkti kaugus q -st.

100 Metallsfäärile raadiusega r on antud laeng q . Sfäär ühendatakse maapinnaga läbi pika juhtme, mille takistus on R . Leidke vool läbi juhtme alghetkel.

Vastus: $I_0 = q/(4\pi\epsilon_0 r R)$.

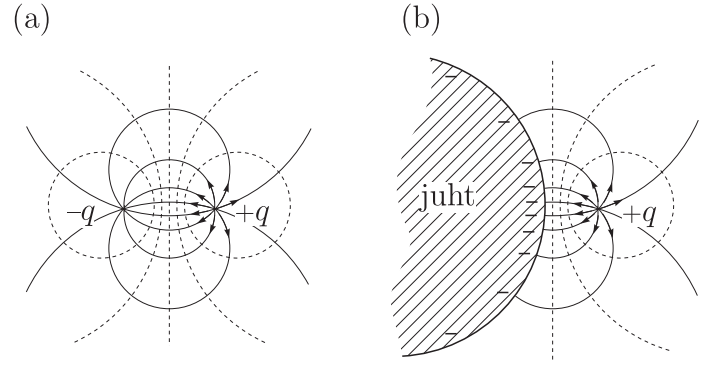
101 Raadiust R omava metallsfääri sisemuses paikneb metallist kera raadiusega r . Kera ja sfääri keskpunktid ühtivad. Kera on ühendatud maapinnaga pika juhtme abil (juhe läheb läbi sfääri pinnale tehtud väikese avause). Sfääril kera ega maandusega elektrilist kontakti ei ole. a) Sfäärile antakse laeng Q . Kui suur laeng indutseeritakse selle tulemusena kera pinnale? b) Leidke sfääri mahtuvus.

Vastus: a) $q = -Qr/R$; b) $C = 4\pi\epsilon_0 R^2/(R - r)$.

3.8 Kujutismeetod juhtides

Indutseeritud pindlaengute välja määramiseks paneme tähele, et väli väljaspool juhti on määratud ainult juhi potentsiaaliga ning väljaspool juhti paiknevate laengutega, indutseeritud pindlaengute tegelikku paigutust ei pea tingimata teadma. Seda võib illustreerida järgmise lihtsa näitega. Joonisel 47a on kujutatud kahe punktlaengu elektrivälja jõujooned (pidevjoontega) ja ekvipotentsiaalpinnad (kriipsjoontega). Joonisel 47b on üks laengutest asendatud juhiga nii, et juhi pind langeb kokku ühe esialgse ekvipotentsiaalpinnaga ning juhi potentsiaal on fikseeritud nimetatud ekvipotentsiaalpinna vastavale väärtusele. Selle toimingu tulemusena väli väljaspool juhti näeb välja täpselt samasugune nagu esialgne väli. Järelikult indutseeritud pindlaengute väli on antud juhtumil ekvivalentne sobival valitud punktlaengu väljaga. *Kujutismeetodi* idee on seega järgmine: asendada indutseeritud pindlaengud juhi sisse asetatud ühe või mitme fiktiivse punktlaenguga q' , q'' , ... nii, et juhi pinnal jääks potentsiaal muutumatuks. Laenguid q' , q'' , ... nimetatakse laengu q kujutisteks. Pindlaengute väli väljaspool juhti on siis ekvivalentne kujutislaengute väljaga. Sellise protseduuriga juhi sees muidugi väli muutub, kuid see ei paku meile enam huvi, sest juhi sees on väli niigi teada (see on võrdne nulliga). Real juhtudel, kui juhi pind on lihtsa geomeetriaga (tasand, kera, silinder jne), võib kujutislaengute asukoha kergesti ära arvata. Olles postuleerinud kujutislaengute asukoha, saab nende suuruse määramiseks kasutada kahte ekvivalentset tingimust. 1) Võib nõuda, et \mathbf{E} oleks juhi pinnaga igas punktis risti. 2) Võib nõuda, et juhi pind oleks ekvipotentsiaalpind.

Vaadeldav juht võib olla kas maandatud või isoleeritud.



Joonis 47: Kujutismeetodi idee juhtide puhul. Pidevate joontega on kujutatud elektrivälja jõujooned, kriipsjoontega ekvipotentsiaalpinnad.

Maandatuks nimetatakse juhti, mis on elektrilises kontaktis hästi massiivse juhiga (nt maakeraga), mille potentsiaal on praktiliselt muutumatu (võrdne nulliga). Maandatud juhi laeng võib muutuda (maanduse kaudu). Isoleeritud juhi potentsiaal võib muutuda, kuid tema kogulaeng on muutumatu ja järelikult kujutislaengute summa on samuti fikseeritud (järeldots Gaussi teoreemist). Sellisel juhtumil on üheks kujutiseks sageli elektriline dipool.

Indutseeritud pindlaengute tihedus on võrdeline neid esile kutsunud elektrivälja tugevusega. Siit järeldots *superpositsiooniprintsiip*: kui üksik laeng q_1 indutseerib juhi pinna teatud punktis laengutiheduse σ_1 ja üksik laeng q_2 indutseerib samas punktis laengutiheduse σ_2 , siis laengute q_1 ja q_2 koosmõjul indutseeritakse selles punktis laengutihedus $\sigma_1 + \sigma_2$.

102 Metallsfääri sisemuses paikneb punktlaeng q kaugusel r sfääri tsentrist. Sfääri raadius on R . Kui suur on sfääri potentsiaal?

Vastus: $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 R)$.

103 Lõpmatu tasapinnalise juhi kohal kaugusel h selle pinnast asetseb punktlaeng q . Kui suur jõud sellele laengule mõjub?

Vastus: $F = q^2/(16\pi\epsilon_0 h^2)$.

104 Homogeensesse elektrivälja \mathbf{E}_0 asetatakse metallsfääri raadiusega R . Leidke sfääri pinnale indutseeritud laengute tihedus ja elektrivälja sfääri ümbritsevas ruumis. *Vihje.* Pindlaengute poolt tekitatud väli väljaspool sfääri sarnaneb sfääri tsentrisse paigutatud dipooli väljaga. (Dipooli välja potentsiaali avaldis sai leitud ül.-es 90.)

Vastus:

$$E_r = \left(2\frac{R^3}{r^3} + 1\right) E_0 \cos \theta, \quad E_\theta = \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) E_0 \sin \theta,$$

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

kus θ on nurk vektorite \mathbf{E}_0 ja \mathbf{r} vahel.

105 Homogeensesse elektrivälja \mathbf{E}_0 asetatakse metallsilindri raadiusega R ; silindri telg on risti \mathbf{E} -ga. Leidke silindri pinnale indutseeritud laengute tihedus ja elektrivälja silindri ümbritsevas ruumis. *Juhtnõör.* Lahenduse idee täpselt sama mis eelmises ülesandes, ainult vaadeldaval juhul tuleb kujutislaengutena vaadelda kahte lõpmata lähestikku asetsevat erinimeliselt laetud traati, mis jooksevad piki silindri telge. Nende

poolt tekitatava välja määramine toimub samal põhimõttel nagu dipooli puhulgi (ül. 77, 78).

Vastus:

$$E_r = \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) E_0 \cos \theta, \quad E_\theta = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) E_0 \sin \theta,$$

$$\sigma(\theta) = 2\varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

106 Laeng q paikneb maandatud metallkera lähedal, kaugusel h viimase keskpunktist. Kera raadius on R . Leidke laengule mõjuv jõud.

Vastus: $F = -\frac{hRq^2}{4\pi\varepsilon_0(h^2 - R^2)^2}$. Kujutislaenguks on $q' = -Rq/h$, mis asetseb kaugusel R^2/h kera keskpunktist.

107 Lahendage eelmine ülesanne juhul, kui kera on maandamata. Vihje. Ülesande 106 lahendust tuleb ainult veidi täiendada.

$$Vastus: F = -\frac{R^3(2h^2 - R^2)q^2}{4\pi\varepsilon_0 h^3(h^2 - R^2)^2}.$$

108 Plaatkondensaatori katete vahekaugus on d ning pindala S . Mõlemad plaadid on maandatud. Plaatide vahele, esimesest plaadist kaugusele x viiakse punktilaeng q . Kui suured laengud kogunevad kummalegi plaadile?

$$Vastus: q_1 = -q(1 - x/d), \quad q_2 = -qx/d.$$

3.9 Dielektrikud elektrostaatilises väljas

Dielektrikute omadused on määratud seotud laengutega (aatomituumad ja aatomite koosseisu kuuluvad elektronid). Kuigi need laengud ei saa oma aatomi piiresst lahkuda, võivad nad välise elektrivälja toimel nihkuda kõrvale oma tasakaaluasendist. Positiivsed laengud nihkuvad välja suunas, negatiivsed vastassuunas — dielektrik polariseerub.¹³ Kui polarisatsioon on ruumiliselt ühtlane, siis dielektriku sisemuses jääb laengute ruumtihedus endiselt nulliks, pinnale aga indutseeritakse mõnesugune seotud laengute pindtihedus.

Välja kirjeldamiseks dielektrikus on mugav kasutada peale väljatugevuse veel elektrilist induksiooni $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, kus suhteline dielektriline läbitavus ε on dielektriku ainet iseloomustav konstant. Vaakumis $\varepsilon = 1$. Elektriline induksioon on sellisel kavalal viisil defineeritud, et ta on määratud ainult vabade laengute jaotusega — ta võtab automaatselt arvesse dielektriku polarisatsiooni. Seega vektori \mathbf{D} normaalkomponent D_n on pidev kahe dielektriku lahutuspinnaal. Pidev on samuti elektrivälja tugevuse tangentsiaalkomponent E_τ (indutseeritud laengud tingivad ainult normaalsihilise väljakomponendi katkevuse). Gaussi teoreem, esitatuna elektrinihke kaudu, võtab kuju:

$$\oint_S \mathbf{D}_n dS = \sum_i q_i,$$

¹³Mikroskoopilisel tasandil võib eristada kolme polarisatsioonimehhanismi. 1) Elektrivälja "venitab laperguseks" aatomite elektronpilved, nõnda et elektronide laengukese nihkub paigast; 2) kui dielektrik koosneb permanentset dipoolmomenti omavatest molekulidest, siis elektrivälja orienteerib need molekulid osaliselt välja sihis; 3)ioonkristallide puhul võib kujutleda, et erinimelistest ioonidest moodustatud alamvõred nihkuvad üksteise suhtes kui tervikud. Makroskoopilises pildis on resultaat (aine polariseerumine) kõigil juhtudel sama ja kirjeldatav ühesugusel viisil.

kus q_i on vabad laengud, mis on hõlmatud pinnaga S .

Erinevalt juhtidest indutseeritud pindlaengute väli ei suuda dielektriku sees välist välja kompenseerida vaid ainult nõrgendab seda (seda nõrgendamist iseloomustabki ε). Milliseks väli dielektriku sees kujuneb, sõltub dielektriku kujust ja orientatsioonist välisvälja suhtes. Homogeense välisvälja puhul on paljudel juhtudel (plaat, kera, silinder) mõistlik eeldada, et väli dielektriku sees on samuti homogeenne ning dielektrik polariseerub ühtlaselt. Siis jääb vaid üle kindlaks teha, kas väljatugevuse ja polarisatsiooni suuruse sobiva valikuga õnnestub rahuldada D_n ja E_τ pidevuse nõuet kõikjal dielektriku pinnal. Seejuures tasub tähele panna, et ühtlaselt polariseeritud keha võib vaadelda kui kahe homogeenelt ja võrdvastasmärgiliselt laetud ning teineteise suhtes õige veidi nihkes oleva keha superpositsiooni. Elektrivälja arvutamine väljaspool keha toimub siis samal põhimõttel nagu ülesannetes 104 ja 105.

Lahendi tõepärasuse kontrollimiseks tasub veenduda, et $\varepsilon = 1$ puhul saadakse sama tulemus mis vaakumi jaoks.

109 Plaatkondensaatori katete vahekaugus on d , pindala S ja katete vahel on dielektrik, mille dielektriline läbitavus on ε . a) Leidke kondensaatori mahtuvus; b) leidke jõud, mis mõjub kondensaatori katete vahel, kui neile on rakendatud potentsiaalide vahe U (võib eeldada, et mehaaniline kontakt dielektriku ja katete vahel puudub).

$$Vastus: a) C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d; b) F = \varepsilon^2\varepsilon_0 S U^2 / 2d^2.$$

110 Plaatkondensaator on sukeldatud elektrit mittejuhtivasse vedelikku, mille dielektriline läbitavus on ε . Leidke plaatide vahel mõjuv jõud, kui plaatide pindala on S , vahekaugus d ning laeng $\pm Q$.

Vastus: $F = -Q^2 / (2\varepsilon\varepsilon_0 S)$; tulemus näitab, et polariseeritud dielektrik avaldab elektroodidele täiendavat jõudu ja ε võib tõlgendada kui suurust, mis näitab mitu korda on dielektrikusse asetatud laetud kehade vahel mõjuv elektrostaatiline tung väiksem kui see oleks vaakumis.

111 Ühtlase paksusega dielektrikust plaat on asetatud homogeenesse välja \mathbf{E}_0 , millega plaadi pinnanormaal moodustab nurga θ . Dielektriku suhteline läbitavus on ε . Leidke elektrivälja plaadi sees ja plaadi pinnale indutseeritud seotud laengute tihedus.

$$Vastus: E_{\parallel} = E_0 \sin \theta, \quad E_{\perp} = E_0 \cos \theta / \varepsilon, \quad \sigma = E_0 \cos \theta (\varepsilon - 1) / \varepsilon\varepsilon_0.$$

112 Pikk dielektrikust silinder asetatakse homogeenesse välja \mathbf{E}_0 . Leidke väli silindri sees, kui silindri telg on: a) paralleelne \mathbf{E}_0 -ga; b) risti \mathbf{E}_0 -ga.

$$Vastus: a) \mathbf{E} = \mathbf{E}_0; b) \mathbf{E} = 2\mathbf{E}_0 / (\varepsilon + 1).$$

113 Dielektrikust kera raadiusega R asetatakse homogeenesse välja \mathbf{E}_0 . Leidke väli kera sees ning indutseeritud pindlaengute tihedus kera pinnal.

$$Vastus: \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{E}_0}{2 + \varepsilon}, \quad \sigma(\theta) = 3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

3.10 Kujutismeetod dielektrikutes

Vaatleme kahte kokkupuutes olevat dielektrilist keskkonda. Asetame keskkonda 1 laengu q . Selle toimel indutseeritakse dielektrikute lahutuspinnaal seotud laengute mõnesugune

jaotus σ . σ on määratud summaarse väljaga (Gaussi teoreemi kaudu), mis omakorda sõltub σ -st. Arvestamaks indutseeritud laengute mõju keskkonnas 1, asendame nad sobivalt valitud kujutislaenguga q' (nagu tegime juhtide puhul). Keskkonnas 2 asuva vaatlaja seisukohalt ei saa me aga laengut q' säilitada. Siin oletame hoopis, et laengute σ ekraaneeriv toime on selline, nagu oleks laengu q asemel laeng q'' . Nõudes, et suurused E_τ ja D_n oleksid pidevad dielektrikute lahtuspinnal, saame q' ja q'' määramiseks lineaarse võrrandisüsteemi.

114 Kahe lõpmatu ulatusega tasapinnalise dielektriku lahtuspinna lähedal kaugusel h on punktlaeng q . Dielektrikute läbitavused on ε_1 ja ε_2 . Leidke väli kummaski dielektrikus.

Vastus: $E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \hat{r}_2$, $E_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \hat{r}_1$, $q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$, $q'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$. Siin r_1 on väljapunkti kaugus laengust q ja r_2 väljapunkti kaugus laengu q kujutisest q' .

3.11 Dielektrikud mittehomogeenses väljas

Mittemitthomogeenses väljas mõjub dielektrikule jõud, mis tõmbab teda tugevama välja piirkonda (polaarsete molekulide korral võib selles veenduda ül. 82 näitel). Kui väli on nõrgalt mittehomogeenne (st muutub vähe dielektriku mõõtmete ulatuses), siis dielektrikku võib lugeda ühtlaselt polariseerituks ning lihtsamatel juhtudel (nt kera puhul) saab dielektrikule mõjuva jõu otseselt arvutada. Enamus vaadeldavasse rubriiki kuuluvaid ülesandeid on seotud kondensaatoritega, mille puhul välja mittehomogeensus avaldub kondensaatori äärtel (ül. 52, 53, 54, 110). Nagu eespool selgus, on sellised ülesanded lahendatavad virtuaalse nihke meetodi abil analüüsimatele elektrivälja detailset käitumist äärtel.

115 Leidke jõud, mis mõjub dielektrikust kerale mittehomogeenses väljas $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Kera raadius on R ning materjali dielektriline läbitavus ε . *Vihje.* Vt. ül. 113 ja 82.

Vastus: Jõu x -telje sihiline komponent

$$F_x = 2\pi\varepsilon_0 R^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\partial}{\partial x} E^2.$$

4 Magnetostaatika

4.1 Biot'-Savart'i seadus

Magnetostaatika üheks põhiülesandeks on etteantud staatiliste voolude poolt tekitatava magnetvälja arvutamine. Kui magnetvälja algallikad on liikuvad laengud, väljendatakse magnetostaatika põhiseadused enamasti voolude kaudu. Iga vool on kirjeldatav voolukontuuriga ja selles voolava voolu tugevusega I . Kui me tähistame elementaarnihet piki voolukontuuri voolu suunas $d\mathbf{l}$ -ga, siis suurust $I d\mathbf{l}$ nimetatakse *vooluelemendiks*. Vooluelemendil on magnetostaatikas samasugune roll nagu punktlaengul elektrostaatikas. Coulomb'i seaduse analoogiks võib lugeda *Biot'-Savart'i seadust*, mille kohaselt vooluelement $I d\mathbf{l}$ annab magnetinduktsiooni kaugusel r pa-

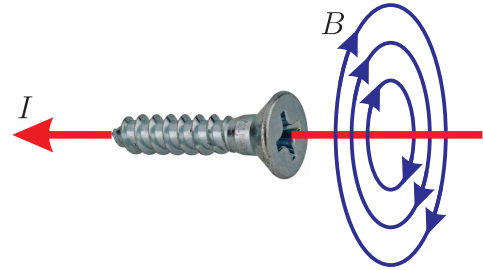
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}.$$

Kahe vektori vektorkorrutis on teatavasti risti kummagi vektoriga, nii et vektor $d\mathbf{B}$ on risti nii voolu sihiga kui ka kohavektoriga \mathbf{r} . $d\mathbf{B}$ suunda on kõige lihtsam leida järgmise *kruviireegli* kaudu: kui vektorkorrutise esimest vektorit $d\mathbf{l}$ pöörata mõtteliselt teise vektori \mathbf{r} poole (mööda väiksemat nurka!), siis vektorkorrutise suuna annab paremakäelise kruvi liikumise suund.

Meelevaldse voolude konfiguratsiooni poolt tekitatava välja saab leida Biot'-Savart'i seaduse ning superpositsiooniprintsiibi abil. On kerge näha, et sirgvoolu poolt tekitatava magnetilise induktsiooni jooned kujutavad enesest koaksiaalseid ringjooni. Siit saame veelgi mugavama kruvireegli vektori \mathbf{B} suuna määramiseks, mida kirjeldab joonis 48.

Kuivõrd vool on laengute suunatud liikumine, siis Biot'-Savart'i seadusest järeldub ka kiirusega \mathbf{v} liikuva punktlaengu q väli:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (6)$$



Joonis 48: Kruvireegel sirgvoolu poolt tekitatava magnetilise induktsiooni suuna määramiseks.

116 Leidke magnetiline induktsioon ringvoolu teljel kaugusel x ringvoolu tasandist. Voolutugevus kontuuris on I ja kontuuri raadius R .

Vastus: $B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 R^2 I / (R^2 + x^2)^{3/2}$.

4.2 Tsirkulatsiooniteoreem

Kuna magnetlaenguid looduses ei eksisteeri, siis Gaussi teoreem magnetvälja jaoks on järgmine:

$$\oint_S \mathbf{B}_n dS = 0.$$

See tähendab, et magnetilise induktsiooni jooned on kinnised (ei alga ega lõpe kusagil). Näiteks vooluelemendi poolt tekitatava magnetilise induktsiooni jooned kujutavad enesest koaksiaalseid ringjooni, nagu leidsime eespool Biot'-Savart'i seaduse põhjal.

Olgu Γ mingi suletud kontuur. Tähistame $d\mathbf{l}$ -ga elementaarnihet piki kontuuri ja \mathbf{B}_l kaudu vektori \mathbf{B} projektsiooni vektorile $d\mathbf{l}$. Vektorvälja \mathbf{B} *tsirkulatsiooniks* piki kontuuri Γ nimetatakse joonintegraali

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}_l d\mathbf{l}.$$

Tsirkulatsiooni mõistet on jällegi mugav illustreerida vedeliku voolamise näitel. Vedelikuosakese kiirusvektori tsirkulatsiooni erinevus nullist tähendaks, et vedelikus toimub keeriseline liikumine e. turbulents.

Kuna magnetilise induktsiooni jooned moodustavad kinniseid kõveraaid, siis on selge, et \mathbf{B} tsirkulatsioon piki suletud kontuuri peab olema üldiselt nullist erinev. Seda väljendab *tsirkulatsiooniteoreem* ehk *koguvooluseadus*, mille me esitame siin ilma tuletuseta:

$$\oint_{\Gamma} B_l dl = \mu_0 \sum_i I_i,$$

kus summeeritakse üle kõikide voolude I_i , mis on hõlmatud kontuuriga Γ . Voolusid I_i tuleb käsitleda algebraliste suurusena. Need voolud, mille suunad on seotud ümberkäigusuunaga kruvireegli kaudu, tuleb võtta positiivse märgiga. Kontuur Γ on otstarbekas niimoodi valida, et joonintegraali arvutamine oleks triviaalne, st et vähemalt tükati oleks $B_l = \text{Const}$. Tsirkulatsiooniteoreem võimaldab mõningatel lihtsatel juhtudel (sirgvoolu, solenoidi väli) kergesti arvutada magnetvälja induktsiooni. Tsirkulatsiooniteoreem mängib magnetostaatika ülesannete lahendamisel samasugust rolli nagu Gaussi teoreem elektrostaatikas.

117 Leidke magnetiline induktsioon, mille tekitab lõpmatu tasandiline vool. Voolutihedus (A/m) on kõikjal ühesugune ja võrdne α .

Vastus: $B = \mu_0 \alpha / 2$.

118 Leidke magnetiline induktsioon kaugusel r lõpmata pikast sirgjuhtmest. Voolutugevus juhtmes on I .

Vastus: $B = \mu_0 I / (2\pi r)$.

119 Leidke magnetiline induktsioon kaugusel r silindrilise ristlõikga juhi teljest, kui voolutihedus (A/m²) juhi ristlõike ulatuses on ühtlane ja võrdne J . Silindri raadius on R .

Vastus:

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 J r / 2 & \text{kui } r < R \\ \mu_0 J R^2 / (2r) & \text{kui } r \geq R \end{cases}$$

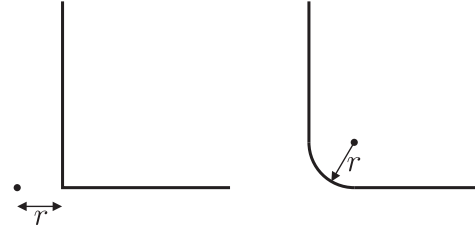
120 Solenoidiks nimetatakse peenikest juhett, mis on ühtlaselt ja tihedalt keritud silindrilisele karkassile. Vaatleme hästi pikka solenoidi, millel keerdude arv ühikulise pikkusega lõigu kohta piki telge on n ning voolutugevus juhtmes I . Selline solenoid on plaatkondensaatori magnetiline analoog. Näidake, et: a) solenoidi sisemuses on magnetväli homogeenne ja suunatud telje sihis; b) väljaspool solenoidi magnetväli puudub; c) magnetilise induktsiooni väärtus solenoidi sees on $B = \mu_0 n I$.

4.3 Superpositsiooniprintsiip

Superpositsiooniprintsiip ja selle eksootilisemad variandid toimivad magnetostaatikas põhimõtteliselt samuti nagu elektrostaatikas. Biot-Savart'i seaduse olemusest tulenevalt on võimalik lihtsasti lahendada isegi mõningaid selliseid probleeme, mis elektrostaatikas vajaksid tingimata integraalide arvutamist (nt ül. 121).

121 Joonisel 49 on kujutatud kaks voolukontuuri, kus voolutugevus on I (sirgvoolud kulgevad lõpmatusse). Leidke kummagi voolu puhul magnetilise induktsiooni väärtus musta täpiga tähistatud punktis.

122 Kui suur on magnetilise induktsiooni väärtus pika solenoidi otsa juures (teljel)? Solenoidi keerdude arv ühikulise



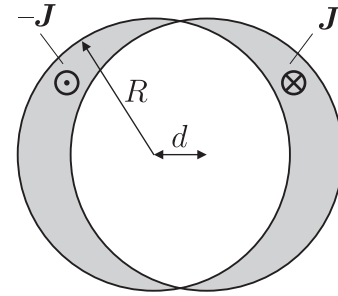
Joonis 49: vt ülesanne 121.

pikkusega lõigu kohta piki solenoidi telge on n ning voolutugevus I .

Vastus: $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$.

123 Määrake magnetiline induktsioon õõnsuses, mis moodustub kahe lõpmata pika paralleelse silindrilise ristlõikega sirgjuhi lõikumisel (joon. 50). Voolutihedused juhtides on võrdsed ent vastassuunalised ($\pm J$), mõlema juhi raadius on R ning nende tsentrite vahekaugus on d .

Vastus: $\mathbf{B} = (\mu_0/2) \mathbf{J} \times \mathbf{d}$ (homogeenne vertikaalne väli).



Joonis 50: vt ülesanne 123.

4.4 Ampere'i seadus

Vooluelemendile $I d\mathbf{l}$ mõjub magnetväljas \mathbf{B} jõud

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Siit saab omakorda leida kiirusega \mathbf{v} liikuvale punktlaengule q mõjuva nn *Lorentzi jõu*:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

124 Leidke kahe lõpmata pika paralleelse sirgjuhtme vahel ühikulise pikkusega lõigu kohta mõjuv jõud, kui voolud juhtmetes on I_1 ja I_2 ning juhtmetevaheline kaugus on r .

Vastus: $F = \mu_0 I_1 I_2 / (2\pi r)$.

4.5 Magnetdipool

Magnetdipool on elektrilise dipooli analoog. Kuna magnetlaengud puuduvad, siis magnetdipool ongi jämedaim lähendus mistahes voolude süsteemi magnetvälja kirjeldamiseks suurte kaugustel. Magnetdipooli lihtsaimaks mudeliks on lõpmata väike tasapinnaline voolukontuur. Seda voolukontuuri iseloomustab *magnetmoment* \mathbf{p} , mille moodul võrdub SI (I — voolutugevus kontuuris, S — kontuuri pindala), siht on määratud voolukontuuri tasandi normaaliga ja suund kruvireeglina. \mathbf{p} ei sõltu kontuuri kujust. Magnetiline dipool \mathbf{p} tekitab

ruumipunktis \mathbf{r} välja, mis polaarkoordinaatides on esitatav järgmiselt (vrld. valemiga 4):

$$B_r = \frac{\mu_0 p}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 p}{4\pi r^3} \sin \theta.$$

Välises väljas \mathbf{B} mõjub dipoolile pöördemomenti $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{B}$, mis püüab pöörata vektori \mathbf{p} väljaga \mathbf{B} samasuunaliseks. Magentdipooli energia välisväljas \mathbf{B} avaldub $\Pi = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{B}$. Seega mittehomogeenses väljas rakendub dipoolile jõud, mille x -sihine komponent $F_x = \mathbf{p}(\partial \mathbf{B} / \partial x)$.

Magnetdipooli väljana võib kirjeldada näiteks magneetunud ainetüki (püsimagneeti) poolt tekitatavat magnetvälja suurtel kaugustel. Vastav magnetmoment on siis aines eksisteerivate elementaarsete ringvoolude magnetmomentide vektorsumma (vt ka jaotist 4.6).

125 Laeng Q on ühtlaselt jaotunud üle sfääri raadiusega R . Sfäär pöörleb nurkkiirusega ω ümber tsentrit läbiva telje. Leidke sellise süsteemi magnetmoment. *Juhtnõör.* Jaotage sfääri pind lõpmata õhukesteks kihtideks ja summeerige. Õhukese sfäärilise segmendi pindala on määratud tema kõrgusega Δh : $\Delta S = 2\pi R \Delta h$.

Vastus: $\mathbf{p} = QR^2 \omega / 3$.

126 Püsimagneet on riputatud niidi otsa. Selle magnetmoment on p (vektor \mathbf{p} asetseb horisontaaltasapinnas) ja inertsi moment niidi kinnituspunktiga määratud vertikaaltelje suhtes I . Millise võnkeperioodiga toimuvad väikese amplituudiga vabavõnkumised, kui tekitada ruumis homogeenne horisontaalne magnetväli induktiooniga B ?

Vastus: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{pB}}$.

127 Kaks püsimagneetit (magnetmomentid \mathbf{p}_1 ja \mathbf{p}_2) on paigutatud üksteisest kaugusele r , mis on palju suurem nende mõõtmetest. Leidke jõud, mis mõjub magnetite vahel.

Vastus: $F = -\frac{3\mu_0}{2\pi r^4} (\mathbf{p}_1 \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \hat{\mathbf{r}})$.

128 Elementaarosakese magnetmomentid ja vastava impulsi momentid suhet nimetatakse güromagnetiliseks suhteks. Leidke güromagnetiline suhe elektroni orbitaalse liikumise jaoks käsitledes elektroni liikumist Bohri teooria raames.¹⁴

Vastus: $p/L = -e/2m$.

4.6 Magnetväli aines

Seni vaatlesime selliseid magnetostaatika ülesandeid, kus voolude paigutus ruumis oli etteantud ja fikseeritud. Viies magnetvälja ainetüki, peame arvestama aine *magneetumisega*, st aines tsirkuleerivate molekulaarsete voolude ümberorienteerimisega magnetväljas. Molekulaarvoolud on tingitud aatomites tsirkuleerivatest elektronidest ja nende omamagnetmomentidest (spinnid). Seega on aatomitel ja molekulidel olemas magnetmoment. Välise välja puudumisel on need magnetmomentid kaootiliselt orienteeritud (va. ferromagneetikutes) ja nende mikroskoopilised väljad vastastikku kompenseerivad üksteist. Välise välja sisselülitamisel püüavad need dipoolid orienteeruda eelistatult välja sihis — aine magneetub. Aine

sees mikroskoopilised voolud endiselt kompenseerivad üksteist, kuid aine pinnal liiguvad molekulaarvoolud kõik ühes suunas ja moodustavad mõnesugune makroskoopilise voolu. Seega magneetunud aine tekitab lisavälja, mis on määratud nende pindvoolude poolt. Näiteks ühtlaselt piki telge magneetitud silindrilise püsimagneeti väli on täpselt samasugune nagu sarnaste mõõtmetega solenoidi väli, õõnessilindri-kujulise püsimagneeti väli on esitatav kui kahe koaksiaalse solenoidi summaarne väli jne.

Magnetvälja käsitlemiseks aines on mugav kasutada peale magnetilise induktiooni veel *magnetvälja tugevust* $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \mu_0$, kus suhteline magnetiline läbitavus μ on ainet iseloomustav konstant. Ferromagneetikutel $\mu \gg 1$, kõigil teistel ainetel $\mu \approx 1$. Analoogselt elektrilise induktiooniga on magnetvälja tugevus määratud ainult vabade laengukandjate juhtivusvoolu jaotusega ruumis. Tsirkulatsiooniteoreem, esitatuna vektori \mathbf{H} kaudu, võtab kuju

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i I_i,$$

kus seekord I_i on *juhtivusvoolud*, mis on hõlmatud kontuuriga Γ (st I_i hulka ei tule arvata magneetunud aine pinnale indutseeritud molekulaarseid voole). Siit on kerge järeldada, et H_τ peab olema pidev kahe keskkonna lahutuspinnaal. Lisaks teame, et vektori \mathbf{B} jooned on kinnised, seega B_n on samuti pidev keskkondade lahutuspinnaal.

Nagu elektrostaatikaski, homogeense välise magnetvälja puhul on sageli mõistlik eeldada, et väli magneetiku sees on samuti homogeenne ning magneetumus on ühtlane. Siis jääb vaid üle kindlaks teha, kas väljatugevuse ja magneetumuse suuruse sobiva valikuga õnnestub rahuldada B_n ja H_τ pidevuse nõuet kõikjal magneetiku pinnal.

Elektro- ja magnetostaatika põhivõrrandid on üldiselt sarnase struktuuriga, erinevus seisneb vaid magnetlaengute puudumises. Seetõttu saab analoogiat vastavate suuruste vahel ($\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{B}$, $\varepsilon \leftrightarrow \mu$) edukalt kasutada mõningate magnetostaatika ülesannete lahendamisel, kui on teada vastava elektrostaatika ülesande lahend või ka vastupidi.

129 Raua aatomi magnetmoment on $p = 2,2\mu_B$, kus $\mu_B = e\hbar/2m_e \approx 9,27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2$ on nn Bohri magneton (elektroni omamagnetmoment). Naaberaatomite vahekaugus raua kuubilises kristallvõres on $d = 2,3 \text{ \AA}$. Kui suur oleks magnetiline induktioon maksimaalselt magneetunud rauas välisvälja puudumisel?

Vastus: $B = \mu_0 p / d^3 \approx 2,1 \text{ T}$.

130 Leia magnetiline induktioon lõpmata pika solenoidi sees, kui solenoid on täidetud ainega, mille suhteline magnetiline läbitavus on μ . Solenoidi amperkeerdude arv ühikulisel pikkusega lõigu kohta piki solenoidi telge on nI .

Vastus: $B = \mu \mu_0 nI$.

131 Magneetikust kera suhtelise magnetilise läbitavusega μ on asetatud homogeensesse magnetvälja \mathbf{B}_0 . Leia magnetiline induktioon kera sees. *Vihje.* Ühtlaselt magneetunud kera magnetiline induktioon väljaspool kera sarnaneb kera tsentrisse paigutatud magnetilise dipooli väljaga.

Vastus: $\mathbf{B} = 3\mu \frac{\mathbf{B}_0}{2 + \mu}$ (vrld. ül. 113).

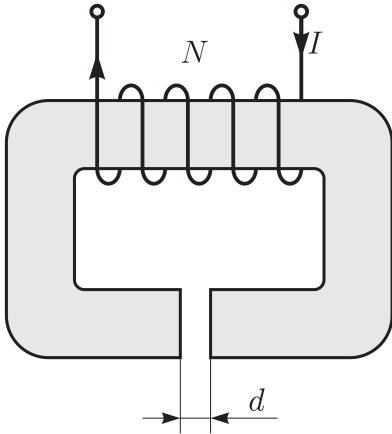
¹⁴Teatavasti Bohri teooria kohaselt tiirleb elektron ümber tuuma ringorbiidil, kusjuures elektroni orbitaalne impulsi moment on kvantitud: $mvr = n\hbar$, kus $n = 1, 2, 3, \dots$

4.7 Ferromagneetikud

Ferromagneetikute iseärasuseks on, et $\mu \gg 1$ ja sõltub H -st. Seejuures μ (ega ka B) ei ole ühene H funktsioon. Kui H muutub tsükliliselt, siis B - H teljestikus moodustub nn hüstereesisilmus, mille pindala (so $\oint BdH$) on võrdne soojushulgaga, mis eraldub ferromagneetiku ühikulises ruumalas ühe tsükli vältel (nn ümbermagneetimistö). Väga tugevates väljades aine magneetumus saavutab lõpliku maksimaalse väärtuse (kõik molekulaarvoolud on ühes sihis orienteeritud) ja seega $\mu \rightarrow 1$.

Uurides induksioonihoonte murdumist ferromagneetiku pinnal jõuame tingimuse $\mu \gg 1$ tõttu järeldusele, et ferromagneetikus on \mathbf{B} praktiliselt paralleelne pinnaga ja väljaspool ferromagneetikut praktiliselt risti pinnaga. Seega magnetahelaid käsitlevates ülesannetes võib lugeda, et magnetilise induksiooni jooned on koondunud põhiliselt ferromagneetiku sisemusse ja nende "lekkimist" läbi ferromagneetiku külgpinna võib mitte arvestada.

132 Laboris kasutatav elektromagnet koosneb raudsüdamikust (suhteline magnetiline läbitavus μ), millele on keritud N keeruga voolupool (joon. 51). Õhupilu laius d on palju väiksem südamikule paksusest. Südamikule kogupikkus on l . Kui suur on magnetiline induksioon õhupilus, kui voolutugevus on I ?
Vastus: $B = \mu_0 NI / (l/\mu + d)$.



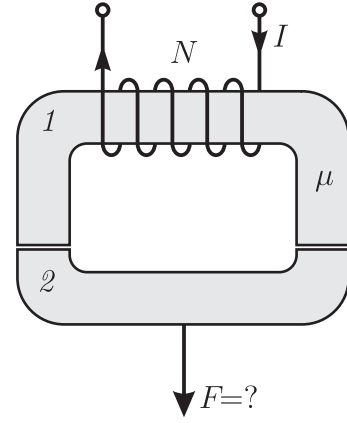
Joonis 51: vt ülesanne 132.

133 Elektromagnet koosneb südamikust 1 ja ankrust 2 (joonis 52); kummagi suhteline magnetiline läbitavus on μ . Südamikule on keritud N keeruga voolupool, mida läbib vool I . Südamikule ja ankrule ristlõikepindala on S ning kogupikkus l . Leidke tõmbejõud, millega südamik hoiab ankrut kinni. *Juhtnõör.* Siin võib kasutada virtuaalse nihke meetodit. Seejuures tuleb aga arvestada, et südamikule ja ankrule vahelise kauguse muutmisel indutseeritakse poolis emj, mille vastu vooluallikas peab tegema tööd.

Vastus: $F = -\mu^2 \mu_0 S N^2 I^2 / l^2$.

4.8 Ülijuhid

Ülijuhi sees alati $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, ka staatiliste väljade korral (nn Meissneri efekt). Järeldused: a) väljaspool ülijuhiti pinna vahetus läheduses $B_n = 0$, st induksioonihooned on paralleelsed pinnaga; b) vastavalt tsirkulatsiooniteoreemile ülijuhi sisemu-



Joonis 52: vt ülesanne 133.

ses $I = 0$, st. vool võib eksisteerida ainult pinnakihis. Kui tuua ülijuhi lähedale vooluga juht, indutseeritakse ülijuhi pinnal sellised voolud, mis parajasti kompenseerivad ülijuhi sees välise magnetvälja. Mõningatel lihtsatel juhtudel saab nende pindvoolude mõju leida kujutismeetodi abiga. Väline vool ja kujutisvool peavad tekitama sellise summaarse välja, mille jaoks $B_n = 0$.

134 Lõpmatu tasapinnalise ülijuhi pinnast kaugusel h asub ülijuhi pinnaga paralleelne lõpmata pikk sirgjuhe, kus voolutugevus on I . Leidke selle juhtme ühikulise pikkusega lõigule mõjuv jõud.

Vastus: $F = \mu_0 I^2 / (4\pi h)$.

5 Elektromagnetiline induksioon

5.1 Faraday induksiooniseadus

Vektorvälja voo mõistega tutvusime jaotises 3.2. Olgu S suvaline pind, mis toetub antud voolukontuurile. *Magnetvoo*s läbi selle kontuuri nimetatakse suurust

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

kus B_n on magnetilise induksiooni normaalkomponent pinnaelemendi dS asukohas. Φ väljendab induksioonihoonte koguarvu, mis on haaratud voolukontuuri poolt ja seega ei sõltu pinna S valikust. Enamikes ülesannetes õnnestub S nõnda valida, et B_n oleks vähemalt tükati konstantne.

Faraday seadus väidab, et suletud kontuuri poolt haaratud magnetvoo muutus indutseerib selles kontuuris elektromotoorjõu $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ (miinusmärk viitab Lenzi reeglile — indutseeritud emj poolt kontuuris tekitatavad voolud toimivad vastu magnetvoo muutusele). Siin esineb Φ täistuletis, mis sisaldab endas kahte komponenti. Esimene, $\partial\Phi/\partial t$, on põhjustatud magnetvälja *ajalisest* muutumisest. Magnetvälja ajalise muutumisega indutseeritud elektromotoorjõudu võib põhjendada *pööriselektivälja* tekkimisega, mille tsirkulatsioon on nullist erinev:

$$\oint_{\Gamma} E_l dl = \mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Teine komponent arvestab kontuuri *asendi* muutumist magnetvälja suhtes (kontuur liigub välja suhtes, muudab oma ku-

ju või orientatsiooni). Selle komponendi saab taandada kontuuri elementaarlõigule. Nimelt kiirusega \mathbf{v} liikuva juhtmeelemendi $d\mathbf{l}$ otste vahel indutseeritakse emj $d\mathcal{E} = \mathbf{B}\mathbf{v}d\mathbf{l}$ (kolme vektori segakorrutis, võib kirjutada ka kujul $\mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ või $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} \times d\mathbf{l}$). Selle elektromotoorjõu allikaks on kiirusega \mathbf{v} liikuvale laengule mõjuv Lorentzi jõud $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Vaatleme magnetväljas asetsevat voolukontuuri, mille oomiline takistus on R . Siis

$$dq = Idt = \frac{\mathcal{E}}{R}dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{d\Phi}{R}.$$

Niisiis sellisel juhul magnetvoo muutus $\Delta\Phi$ määrab üheselt laengu q , mis läbib juhtme ristlõiget sama aja jooksul. Ülijuhtiva kontuuri korral ($R = 0$) saame

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E} = RI = 0 \implies \Phi = \text{Const.}$$

Seega ülijuhtiva kontuuriga haaratud magnetvoog püsib muutumatu. Välise magnetvälja muutudes indutseeritakse ülijuhi pinnale sellised voolud, mille väli kompenseerib välise välja muutuse.

135 Üks meetod magnetilise induktsiooni mõõtmiseks seisneb järgnevas. Magnetvälja viiakse väike pool, mille telg orienteeritakse paralleelseks \mathbf{B} -ga. Pooli väljaviigid ühendatakse nn. ballistilise galvanomeetriga, mis on võimeline mõõtma lühikese vooluimpulsi laengut. Pooli pööratakse nüüd järsult 180° võrra. Kui suur laeng läbib galvanomeetrit? Pooli pindala on S , mähise keerdude arv N ja mähise aktiivtakistus R .

Vastus: $q = 2BNS/R$.

136 Kaks paralleelset horisontaalset lõpmata pikka tühise elektritakistusega metallrelssi asetsevad teineteisest kaugusel l . Relsid on ühendatud kondensaatoriga, mille mahtuvus on C ja mis on laetud pingeni U_0 . Ruumis eksisteerib homogeenne vertikaalne magnetväli induktsiooniga B . Relssidele asetatakse risti metallvarras massiga m , mis saab relsside peal hõõrdevabalt libiseda (kuid säilitab viimastega elektrilise kontakti). a) Millise maksimaalse kiiruse saavutab varras? b) Kui suur on sellise "elektromagnetilise kahuri" maksimaalne võimalik kasutegur (st kui suur osa kondensaatorisse salvestatud energiast on võimalik muundada varda kineetiliseks energiaks)?

Vastus: a) $v_{\max} = \frac{BlCU_0}{m + (Bl)^2C}$; b) $\eta = 0,25$.

137 Dielektrilisest materjalist rõngas massiga m on kergete kodarate abil kinnitatud telje külge, mille ümber ta saab hõõrdevabalt pöörelda. Laeng Q on jaotunud ühtlaselt üle rõnga. Algselt asub rõngas piki telge suunatud homogeeneses magnetväljas induktsiooniga B . Mingil hetkel lülitatakse magnetväli välja. Kui suure nurkkiiruse omandab selle tulemusena algselt liikumatu rõngas?

Vastus: $\omega = BQ/(2m)$.

5.2 Omainduktsioon

Voolukontuuris tsirkuleeriv vool tekitab ümbritsevas ruumis magnetvälja. Selle magnetvälja voog läbib ka seda sama kontuuri. \mathbf{B} väärtus on igas ruumipunktis võrdeline voolutugevusega kontuuris, järelikult ka magnetvoog läbi kontuuri on

võrdeline voolutugevusega: $\Phi = LI$. Võrdetegurit L nimetatakse voolukontuuri *induktiivsuseks*. Kui ahelale on rakendatud pinge U , siis induktsiooniseaduse alusel $U = -\mathcal{E} = d\Phi/dt$ ehk

$$U = L \frac{dI}{dt}, \tag{7}$$

mis on üldine võrrand konstantse induktiivsusega voolukontuuri (induktiivpooli) käitumise kirjeldamiseks (vrdl. kondensaatori võrrandiga 1). Niisiis voolutugevus läbi kontuuri ei saa muutuda hüppeliselt vaid reageerib mõnesuguse inertsiga (väikese induktiivsusega kontuuri korral võib see olla muidugi praktiliselt hetkeline). Näiteks kui induktor on jadamisi takistusega R , siis valemi 7 põhjal

$$RI = U = L \frac{dI}{dt},$$

millest $I \propto \exp(-Rt/L)$, seega oleme saanud karakterse aja $\tau = L/R$, mis iseloomustab voolu muutumise kiirust induktoris. Sellest oluliselt pikemate ajavahemike möödumisel on voolutugevus juba praktiliselt stabiliseerunud ja induktsiooni elektromotoorjõud null.

Mõningatel idealiseeritud juhtudel saab kontuuri induktiivsuse arvutada definitsioonivalemist $\Phi = LI$ lähtudes. Kui meil on tegu kontuuriga, mis koosneb mitmest keerust, siis tuleb tähele panna, et Φ ei ole mitte magnetvoog läbi üksiku keeru, vaid *kogu* magnetvoog, mis on kontuuri poolt aheldatud. Näiteks solenoidi korral $\Phi = N\phi = NBS$, kus $\phi = BS$ on voog läbi ühe keeru. See tuleneb järgmisest mõttekäigust: üksikus keerus indutseeritakse emj $d\phi/dt$, aga solenoidi N keerdu on järjestikku, seega emj solenoidi otste vahel on $Nd\phi/dt$, mis peab olema võrdne $d\Phi/dt$, seega $\Phi = N\phi$.

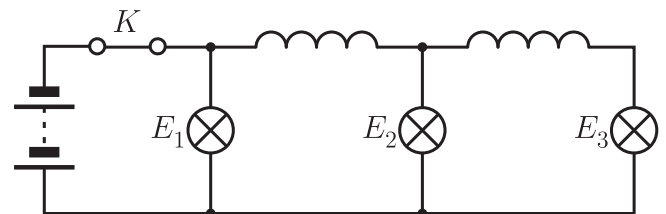
Selleks, et tekitada induktiivsust omavas kontuuris voolu, tuleb teha tööd omainduktsiooni vastu. Tööpoolest,

$$A = \int \mathcal{E}I dt = L \int \frac{dI}{dt} I dt = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

See töö läheb kontuuri ümbritseva magnetvälja energiaks (magnetvälja energiatihedus on $B^2/2\mu_0$). Seda tähelepanekut võib kasutada kontuuri induktiivsuse hindamiseks, sest magnetvälja tugevust saab hinnata teades voolutugevust ja juhi mõõtmeid.

138 Joonisel 53 kujutatud elektriskeemis on lüliti K olnud pikemat aega suletud ning kõik hõõglambid põlevad ühesuguse heledusega (poolide aktiivtakistus on tühine). Mitu korda muutuvad voolutugevused läbi lampide vahetult peale lüliti K avamist?

Vastus: Voolutugevus läbi lambi E_1 kasvab 2 korda, voolud läbi lampide E_2 ja E_3 jäävad samaks.

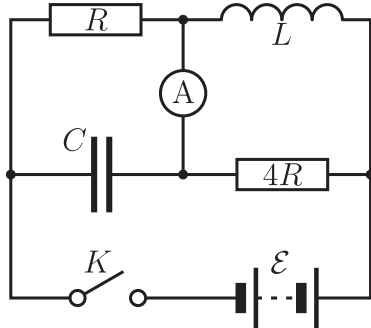


Joonis 53: vt ülesanne 138.

139 Joonisel 54 kujutatud elektriskeemis on lüliti K olnud pikemat aega avatud. a) Kui suur on ampermeetri näit vahe-

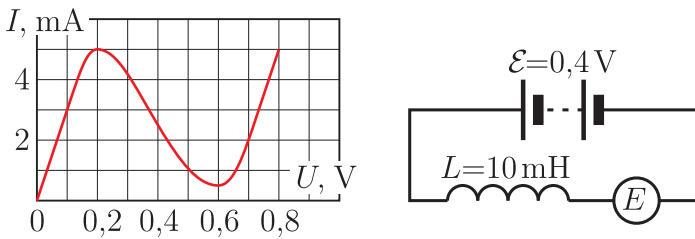
tult pärast lüliti sulgemist? b) Lülitit hoitakse suletuna kuni vool on stabiliseerunud. Kui suur on nüüd ampermeetri näit? c) Kui suur on ampermeetri näit vahetult pärast lüliti avamist?

Vastus: Ampermeetri näit on kõikidel juhtudel 0.



Joonis 54: vt ülesanne 139.

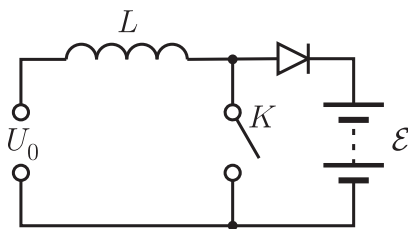
140 Mittelineaarne element E lülitatakse elektriskeemi nõnda nagu näidatud joonisel 55. Samas on toodud selle elemendi voltamperkarakteristik. Kuidas hakkab muutuma pinge sellel elemendil sõltuvalt ajast? Hinnake ka ajaminastaape!



Joonis 55: vt ülesanne 140.

141 Akumulaatorit elektromotoorjõuga $\mathcal{E} = 12\text{ V}$ laaditakse alalispingeallikast $U_0 = 5\text{ V}$ joonisel 56 esitatud skeemi kohaselt. Pooli induktiivsus $L = 1\text{ H}$ ja selle aktiivtakistus on tühine. Diodi võib lugeda ideaalseks. Lüliti K töötab perioodiliselt, olles suletud ajavahemiku τ_1 ja avatud ajavahemiku τ_2 jooksul, kusjuures $\tau_1 = \tau_2 = 0,01\text{ s}$. Leidke keskmine laadimisvoolu tugevus.

Vastus:
$$I_{\text{kesk}} = \frac{U_0^2 \tau_1}{2L(\mathcal{E} - U_0)(\tau_1 + \tau_2)} \approx 8,9\text{ mA}.$$



Joonis 56: vt ülesanne 141.

142 Leidke solenoidi induktiivsus, kui solenoidi diameeter on palju väiksem tema pikkusest l . Traadi keerdude arv on N ja solenoidi ristlõike pindala S . Solenoid on keritud ferromagnetilisele südamikule, mille suhteline magnetiline läbitavus on μ .

Vastus: $L = \mu\mu_0 SN^2/l$.

143 Oletades, et solenoidis voolu tekitamiseks tehtud töö $LI^2/2$ läheb magnetvälja energiaks, näidake, et magnetvälja energiatihedus on $B^2/2\mu_0$.

144 Hinnake pikkust l omava sirgjuhtme induktiivsust, kui traadi raadius on a .

Vastus: $L \sim \mu_0 l \ln(l/a)$.

5.3 Vastastikune induktsioon

Kui kaks voolukontuuri paiknevad ruumiliselt lähedastikku, siis vool ühes kontuuris tingib vooluga võrdelise magnetvoo nii läbi iseenda kui ka läbi teise kontuuri: $\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + L_{21} I_1$. Järelikult voolu muutumine ühes kontuuris indutseerib emj ka teises kontuuris. Selliseid kontuure nimetatakse sidestatuiks. Ülesande 145 lahendus näitab, et vastastikused induktiivsused on võrdsed, $L_{12} = L_{21}$, seetõttu tähistame neid edaspidi ühe ja sama tähega M . Vastastikuse induktiivsuse arvutamiseks piisab kui me oskame leida magnetvoo läbi ühe kontuuri tingituna voolust teises kontuuris.

Kui meil on tegu ühisele südamikule keritud poolidega, siis maksimaalse sidestatuse puhul läbib ühesugune magnetvoog kumbagi mähist (siin me räägime magnetvoost läbi ühe keeru, $\phi = BS$). Järelikult nendes mähistes indutseeritud elektromotoorjõud on üheselt seotud.

145 Näidake, et vastastikused induktiivsused L_{12} ja L_{21} on alati võrdsed. *Juhtnõör.* Leidke sidestatud kontuuride energia, kui nendes voolavad voolud I_1 ja I_2 . Selleks arvutage töö, mida peavad tegema nendesse kontuuridesse lülitatud vooluallikad, selleks et tekitada sellised voolud. Näidake, et tulemus on ühene ainult tingimusel $L_{12} = L_{21}$.

146 Näidake, et $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$, kus L_1, L_2 on sidestatud kontuuride (oma)induktiivsused. *Juhtnõör.* Näidake, et $M > \sqrt{L_1 L_2}$ korral satume vastuollu energia jäävusega, nimelt et voolu suurendamine ühes kontuuridest indutseerib selles kontuuris elektromotoorjõu, mis soodustab voolu edasist kasvamist ($\mathcal{E}_1 dI_1 > 0$).

147 Toroid kujutab endast peenikest juhet, mis on tihedalt keritud rõngakujulisele karkassile. Olgu karkassi keskringjootne raadius R , mähisekeeru raadius r (kusjuures $r \ll R$) ning mähise keerdude arv N . Piki toroidi telge jookseb ühtlane sirge juhe. Leidke toroidi ja sirgjuhtme vastastikune induktiivsus. Tõestage antud süsteemi jaoks võrduse $L_{12} = L_{21}$ kehtivus.

Vastus: $M = \mu_0 N r^2 / 2R$.

148 Leidke kahe tühisele toroidaalsele südamikule keritud pooli vastastikune induktiivsus. Esimese pooli mähisel on N_1 keerdude, teisel poolil N_2 keerdude. Südamiku pikkus on l , ristlõikepindala S ning suhteline magnetiline läbitavus μ .

Vastus: $M = \mu\mu_0 N_1 N_2 S / l$.

149 Ühisele ferromagnetilisele südamikule on keritud kaks pooli. Esimeses mähises on N_1 keerdude, teises N_2 keerdude, kusjuures $N_2/N_1 = n$. Mähiste aktiivtakistused on tühised. Teise mähise otsad ühendatakse takistiga R , seejärel lülitatakse esimese mähise väljaviikude külge alalispingeallikas pingega U . Näidake, et takistil eralduv võimsus on $n^2 U^2 / R$!

5.4 Ekstremaalne vool induktoris ja ekstremaalne pinge kondensaatoril

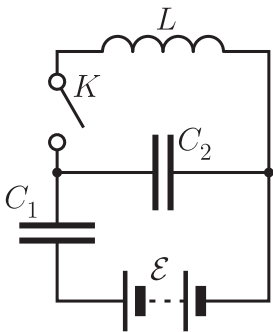
Kui induktoris on vool saavutanud ekstremaalse väärtuse, siis $dI/dt = 0$ ja järelikult indutseeritud emj on null. Kui kondensaatoril on pinge ekstremaalne, siis $dU/dt = 0$ ja seega vool läbi kondensaatori on null.

150 Kondensaatorit mahtuvusega C laetakse üle induktori ja diodi alaliselektromotoorjõu allikast \mathcal{E} . Elektromotoorjõu allika sisetakistus ja pooli aktiivtakistus on tühised. a) Milliseks kujuneb pinge kondensaatoril kui alghetkel oli kondensaatori laeng null? b) Kui suur maksimaalne voolutugevus saavutatakse ahelas? Võib lugeda, et diod avaneb täielikult kui $U > U_d$ ja on lõpmata suure takistusega kui $U < U_d$ (joon. 25). *Vihje.* Siin läheb tarvis ka ideed jaotisest 2.2.

Vastus: a) b) $U = 2(\mathcal{E} - U_d)$.

151 Joonisel 57 kujutatud elektriskeemis on kondensaatorid C_1 ja C_2 laadunud alalispingeallika \mathcal{E} toimel. Nüüd suletakse lüliti K . Milline on a) maksimaalne voolutugevus I_{\max} läbi pooli ja b) maksimaalne pinge U_{\max} kondensaatoril C_1 , mis saavutatakse pärast lüliti sulgemist? *Vihje.* Viimasele küsimusele vastamiseks tuleb tähele panna, et kui kondensaatoril C_1 on pinge maksimaalne, siis kondensaatoril C_2 peab ta olema minimaalne kuivõrd nende pingete summa on konstant (võrdne \mathcal{E} -ga).

Vastus: a) $I_{\max} = \frac{C_1 \mathcal{E}}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}};$ b) $U_{\max} = \mathcal{E} \left(1 + \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right).$



Joonis 57: vt ülesanne 151.

6 Vahelduvvooluahelad

6.1 Elementaarteadmised

Vahelduvvool on selline elektrivool, mis perioodiliselt muudab oma tugevust ja suunda. Kõige lihtsamini on analüüsitavad sellised vahelduvvooluahelad, kus kõik pinged ja voolud oscillierivad *harmooniliselt* ühe ja sama kindla sagedusega, näiteks $U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ ja $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$.¹⁵ Siin $U(t)$ ja $I(t)$ on pinge ja voolu *hetkväärtused* ning U_0 ja I_0 on nende *amplituudväärtused*. Vaheldusvoolu *efektiivväärtuseks* I_{eff} nimetatakse sellise alalivoolu tugevust, mis oma soojus-toimelt läbi takisti on samaväärne antud vahelduvvooluga.

¹⁵Siinjuures ei oma tähtsust, kas võtta aluseks funktsioon \sin või \cos , sest need funktsioonid erinevad vaid kindla faasinihke $\pi/2$ võrra.

Selle võib põhimõtteliselt defineerida meelevaldse perioodilise signaali jaoks:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T I(t)^2 dt},$$

kus T on võnkeperiood ja integreeritakse üle meelevaldse ajavahemiku pikkusega T . Kuna $U(t) = R \cdot I(t)$, siis täpselt samal viisil saab defineerida vahelduvpinge efektiivväärtuse, kusjuures $U_{\text{eff}} = R \cdot I_{\text{eff}}$. On kerge veenduda, et harmooniliselt muutuva voolu korral $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ ja $U_{\text{eff}} = U_0/\sqrt{2}$. Näiteks elektrivõrgu nimipinge 230 V ongi efektiivväärtus, pingeamplituud on aga 325 V.

Kõik lineaarsed skeemielemendid — takisti, kondensaator ja induktor — säilitavad siinuselise voolu ja pinge. Eespool leidsime, et kondensaatori ja induktiivpooli käitumist kirjeldavad võrrandid 1 ja 7. Arvestades, et $(\sin \alpha)' = \cos \alpha$, $(\cos \alpha)' = -\sin \alpha$ ja $\sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$, näeme koheselt, et nendel võrranditel on lahendid, kus nii pinge kui ka vool muutuvad siinuseliselt: $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \Delta\phi)$. Kondensaatori puhul saame tingimused $I_0 = U_0/Z_C$ ja $\Delta\phi = \pi/2$, kus $Z_C = 1/(\omega C)$. Induktori puhul saame analoogiliselt $I_0 = U_0/Z_L$ ja $\Delta\phi = -\pi/2$, kus $Z_L = \omega L$. Seega vahelduvvoolu puhul kondensaator ja induktor käituvad sarnaselt takistiga ja on iseloomustatavad teatava sagedusest sõltuva *näivtakistuse* ehk *impedantsiga* Z . Samas erinevalt oomilisest takistusest nendes elementides vool ja pinge ei ole samas faasis: kondensaatoris vool edestab pinget faasis 90° võrra, induktoris aga jääb 90° võrra maha. Kondensaatori ja induktori (või nende kombinatsiooni) takistus on puhtalt reaktiivne, st soojust ahelas ei eraldu ($\pm 90^\circ$ faasinihkest järeldub, et $\langle UI \rangle = 0$). Meelevaldse faasinihke $\Delta\phi$ korral avaldub aktiivvõimsus kujul

$$\langle UI \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Delta\phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \Delta\phi.$$

6.2 Siinuslainete liitmine

Kui vahelduvvooluahelas on kaks elementi järjestikku või rööbiti, tekib vajadus siinuslainete liitmise järele. Ühe ja sama sagedusega siinuslainete summa on samuti siinuslaine, võimaliku faasinihke tõttu tulevad aga valemid üpris keerukad:

$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) = A \cos(\omega t + \phi),$$

kus

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1),$$

$$\cos \phi = \frac{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}{A}, \quad \sin \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A}.$$

Need on juhtumisi täpselt samad valemid, millega saab arvutada geomeetriliste vektorite summat. Tõepoolest, kui tõmmata koordinaatide alguspunkti vektor pikkusega A , mis pöörleb vastupäeva ringsagedusega ω , siis selle vektori projektsioon x -teljele annabki harmoonilise võnkumise $A \cos(\omega t + \phi)$. Resultantamplituudi arvutamine muutub võrdlemisi lihtsaks juhul kui faasinihe on kas $\pm\pi/2$ või $\pm\pi$. Selline on olukord näiteks meelevaldse arvu takistite, kondensaatorite ja induktiivpoolide järjestikühenduse korral, mille resultatiivne impedants ja tekitatav faasinihe voolu ja pinge vahel

tulevad ilmselt järgmised:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (8)$$

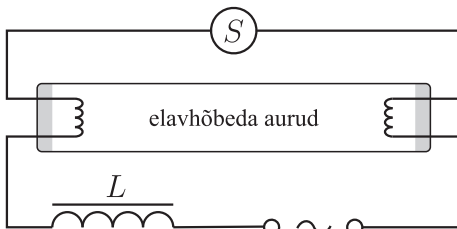
$$\cos \Delta\phi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \Delta\phi = \frac{\omega L - (\omega C)^{-1}}{R}.$$

152 Jootekolb võimsusega 30 W on arvestatud 220 V võrgu-pingele. Kui suure mahtuvusega kondensaator tuleks kütte-kehaga järjestikku ühendada, et küttekeha võimsus kahaneks väärtuseni 20 W? Küttekeha takistuse sõltuvust temperatuurist mitte arvestada.

Vastus: $C \approx 2,8 \mu\text{F}$.

153 Luminestsentslamp lülitatakse vooluvõrku nii, nagu näidatud joonisel 58. Võrgusagedus on 50 Hz ja -pinge 228,5 V. Voolutugevus ahelas on 0,60 A, pinge lambil 84 V, ballastpooli oomiline takistus 26,3 Ω . Luminestsentslampi võib vaadelda kui oomilist takistust. Starter S kujutab endast lüliti, mis sulgub lambi sisselülitamisel, kuid avaneb peagi ning jääb lambi põlemise ajal avatuks. a) Kui suur on pooli induktiivsus L ? b) Leidke pinge ja voolu vaheline faasinihe $\Delta\phi$. c) Kui suur aktiivvõimsus P eraldub ahelas? d) Mõnikord on tarvilik kompenseerida voolu reaktiivset komponenti, mis tekib paljude luminestsentslampide üheaegsel kasutamisel (vt nt ül. 154). Kui suure mahtuvusega kondensaator tuleks pooliga järjestikku lülitada, et muuta faasinihe vastupidiseks?

Vastus: a) $L = 1,09 \text{ H}$; b) $\Delta\phi = 64,1^\circ$; c) $P = 59,9 \text{ W}$; d) $C = 4,6 \mu\text{F}$.



Joonis 58: vt ülesanne 153.

154 Suvila saab voolu alajaamast üle pika 1-faasilise õhuliini. Seepärast on majakilbis peale elektriarvesti ka voltmeeter kontrollimaks majja jõudvat pinget. Tulnud suvilasse peale kolmekuulist äraolekut avastasite, et ehkki kõik elektritarbijad, k.a. valgustus olid olnud välja lülitatud, oli pinge alla jäänud trafo, mida kasutasite basseinilampide jms madalpingeliste tarbijate toitmiseks. Te tahate kindlaks teha, kui mitme kilovatt-tunni eest jääb Teil maksmata Eesti Energiale õhuliiniga atmosfääri kütmise eest, sest seda energia-kulu Teie elektriarvesti ei näita. Selleks võtsite 3 voltmeetri näitu: (1) $U_t = 234,0 \text{ V}$, kui vaid trafo on lülitatud vooluvõrku; (2) $U_0 = 236,0 \text{ V}$, kui nii trafo kui ka kõik tarbijad on välja lülitatud; (3) $U_r = 219,6 \text{ V}$, kui trafo on välja lülitatud, aga elektriradiaator on sisse lülitatud. Viimasel juhul saite tarbitava võimsuse $P_r = 1200 \text{ W}$ teada elektriarvesti kaudu. Samamoodi fikseerisite, et kui vaid trafo on sisse lülitatud, nagu ta oli need kuud, tarbitakse siiski väikest võimsust $P_t = 5 \text{ W}$, sest kadude tõttu ei saa koormuseta trafot pidada puht-induktiivtakistuseks.

6.3 Kompleksmeetod

Siinuslainete liitmisega kaasnevat tehnilist tööd saab lihtsustada *kompleksarvude* abil, sest kompleksarv kätkeb endas informatsiooni nii mooduli kui ka faasi kohta. Suurusele $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ võib kompleksstasandil vastavusse seada vektori¹⁶ $\tilde{x} = Ae^{i\phi}$, nii et siinuslainete liitmine asendub vastavate kompleksarvude liitmisega:

$$A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \rightarrow A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}.$$

Edasi vaatame, kuidas teiseneb aja järgi võetud tuletis:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi) = A\omega \cos(\omega t + \phi + \pi/2) \rightarrow iA\omega e^{i\phi},$$

sest $e^{i\pi/2} = i$. Niisiis tulemise võtmine asendub korrutamisega suurusega $i\omega$. Seega diferentsiaalvõrrandid 1 ja 7 asenduvad kompleksesituses algebraliste seostega, mis on sarnased Ohmi seadusega:

$$\tilde{I} = i\omega C \tilde{U}, \quad \tilde{I} = \frac{1}{i\omega L} \tilde{U}.$$

Järelikult kondensaatorile ja induktorile tuleb sellises skeemis omistada imaginaarne impedants:

$$\tilde{Z}_L = i\omega L, \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Aktiivtakistit kirjeldav võrrand jääb endiseks: $\tilde{U} = R\tilde{I}$. Komplekssete voolude-pingete-impedantsidega võib nüüd opereerida nii nagu oleks tegu alalisvooluahelaga.¹⁷ Muuhulgas jäävad kehtima ka Kirchoffi seadused.

Kui elektriahela reaalne vahelduvvoolutakistus on Z ja faasinihe pinge ja voolu vahel $\Delta\phi$, siis selle ahela kompleksne impedants avaldub kujul $\tilde{Z} = Ze^{i\Delta\phi}$. Ja vastupidi, kui oleme kompleksmeetodi abiga \tilde{Z} määranud, siis saame $Z = |\tilde{Z}|$ ja $\Delta\phi = \arg \tilde{Z}$. Üle perioodi keskmistatud aktiivvõimsus, mis eraldub sellel ahelalõigul, avaldub

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Delta\phi = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{U}\tilde{I}^*). \quad (9)$$

(Efektiivväärtuste kasutamisel koefitsienti 1/2 ei ole.)

Kuna vastastikuse induktiooni näol on samuti tegemist lineaarse protsessiga (indutseeritud emj on võrdeline voolu muutumise kiirusega), siis kompleksmeetod on rakendatav ka induktiivselt sidestatud voolukontuure (nt trafosid) sisaldavate elektriahelate analüüsimisel. Eelnenuga analoogiliselt valem $\mathcal{E} = -MdI/dt$ omandab siinuseliste protsesside puhul kompleksesituses algebralise kuju $\tilde{\mathcal{E}} = -iM\omega\tilde{I}$.

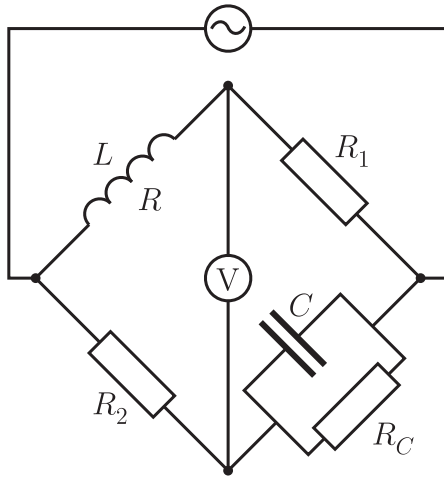
155 Joonisel 59 on kujutatud nn. Maxwelli sild, mida kasutatakse induktori induktiivsuse L ja aktiivtakistuse R määramiseks. Selleks timmitakse takisteid R_1 , R_2 , R_C ning kondensaatorit C seni kuni voltmeetri V näit saab nulliks. Avalda L ja R suuruste R_1 , R_2 , R_C ja C kaudu.

Vastus: $L = R_1 R_2 C$, $R = R_1 R_2 / R_C$.

156 Joonisel 60 on kujutatud lülitus, mille abil on võimalik muuta vaheldusignaali faasi. Näidake, et tühise väljundvoolu

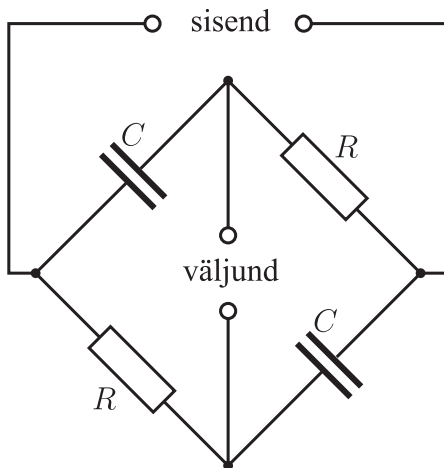
¹⁶Et eristada valemis reaalseid füüsikalisi suurusi vastavatest komplekssetest suurustest, asetame viimaste kohale märgi \sim (tilde).

¹⁷Kompleksarve võib kirjeldatud viisil rakendada üldse mistahes lineaarsetes süsteemides toimuvate ostsillatsioonide analüüsil, nt valguslainete interferents optikas, vaba- ja sundvõnkumised mehaanikas jne.



Joonis 59: vt ülesanne 155.

puhul on väljundpinge suuruselt sama mis sisendis, ent faasinihkega $2 \arctan(\omega RC)$ (või $2 \arctan(-1/\omega RC)$, sõltuvalt sellest, kuidas sisendi ja väljundi polaarsuste vahetuse defineerida)!



Joonis 60: vt ülesanne 156.

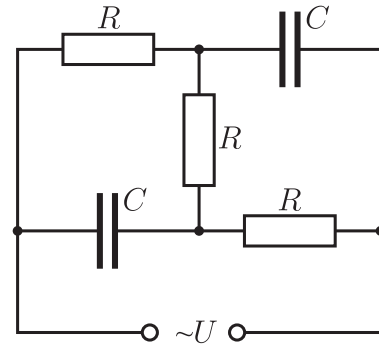
157 Joonisel 61 kujutatud elektri ahelale on rakendatud vahelduvpinge efektiivväärtusega U . Leidke ahelas eralduv soojusvõimsus! Märkus. Viimast võib leida kahel viisil: summeerides individuaalsed aktiivvõimsused $I^2 R$ kõigil takistitel või kasutades valemit 9 terve ahela kohta.

Vastus: $3(U^2/R) \cdot (C^2\omega^2 R^2 + 1)/(C^2\omega^2 R^2 + 9)$.

158 Seosed trafo primaar- ja sekundaarmähise pingete ja voolude vahel on üldjuhul üpris keerulised. Reaalsed trafod on aga sageli lähedased nn ideaalsele trafotele, mille puhul eeldatakse järgmist. 1) Mähiste induktiivsused L_1 ja L_2 on väga suure väärtusega; 2) Primaar- ja sekundaarmähise sidestatus on maksimaalne; 3) Mähiste aktiivtakistused on tühised; 4) Kaod südamikus (hüsterees+pöörisvoolud) on tühised. Näidake, et sel juhul kõik voolud ja pinged on samas faasis ja kehtivad lihtsad seosed

$$\frac{U_2}{U_1} = n \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{n},$$

kus n on sekundaar- ja primaarmähise keerdude arvu suhe (trafo ülekanalitegur).



Joonis 61: vt ülesanne 157.

6.4 Resonants LC-ahelas

LC-ahela resonants leiab aset sagedusel $\omega_{\text{res}} = 1/\sqrt{LC}$. LC-järjestikahela impedants saab sagedusel ω_{res} nulliks, sest pinged kondensaatoril ja induktoril on amplituudi poolest võrdsed ent vastandfaasis (nn pingeresonants). LC-rööpahela impedants kasvab sagedusel ω_{res} lõpmata suureks kuna voolutugevused läbi kondensaatori ja induktori on amplituudi poolest võrdsed ent vastandfaasis (nn vooluresonants).

LCR-ahelate korral resonantsisagedus jääb samaks, sest L ja C endiselt kompenseerivad üksteist (valem 8). Kuid $1/Z$ või Z omab ka ω_{res} juures lõplikku väärtust ja selle sagedussõltuvus näeb ligikaudu välja selline nagu kujutatud joonisel 62. R kasvades läheb resonantsikõver laiemaks.

Vabavõnkumiste sagedus kinnises LC-ahelas on samuti $1/\sqrt{LC}$. Tõepoolest, Kirchoffi II seaduse alusel $U_C + U_L = 0$, vool läbi kummagi elemendi on aga sama, nii et $C dU_C/dt = I$ ja $L dI/dt = U_L$. Kombineerides neid seoseid, saame nii pinget, voolu kui ka kondensaatori laengu ajalise sõltuvuse määramiseks 2-järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0, \quad \omega^2 \equiv \frac{1}{LC}.$$

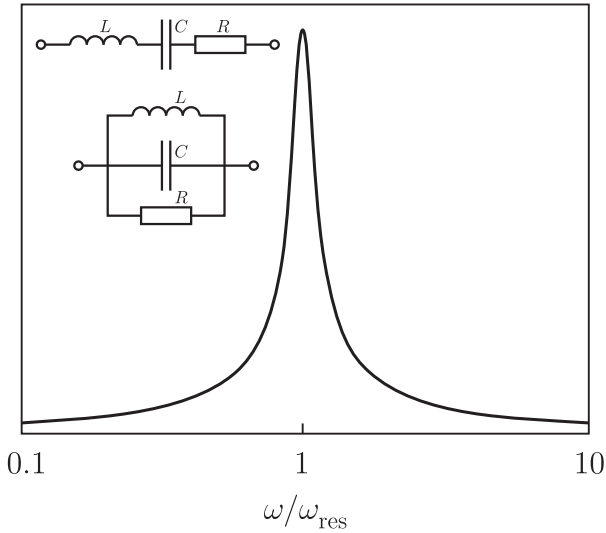
mis on teatavasti sagedusega ω harmoonilise võnkumise võrrand. On ilmne, et kondensaator ja induktor hakkavad perioodiliselt vahetama energiat. Neil hetketel, kui $U = 0$, on kogu energia kätkeatud induktori magnetvälja. Kui $I = 0$, on kogu energia kätkeatud kondensaatori elektrivälja.

159 Joonisel 63 kujutatud LC-ahelas $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 20$ mH, $C_1 = 10$ nF ja $C_2 = 5$ nF. Teatud hetkel oli voolutugevus poolis L_1 võrdne $I_{10} = 0,1$ A ja pinge kondensaatoril C_1 oli samal hetkel $U_0 = 40$ V. Milline on vooluvõnkumiste amplituud poolis L_2 ?

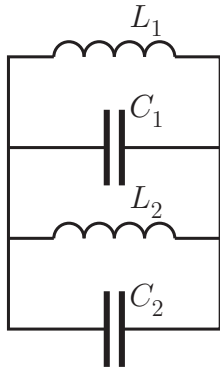
160 Leidke joonisel 64 kujutatud LC-ahela omavõnkesagedus.

161 Leidke joonisel 65 kujutatud LC-ahela omavõnkesagedused. Märkus. Võrrandit $a^2 = b^2$ rahuldab nii $a = b$ kui ka $a = -b$.

Vastus: $\omega = (\sqrt{5} \pm 1)/(2\sqrt{LC})$.



Joonis 62: Resonants LCR -ahelas. Ordinaatteljel on $1/Z$ LCR -järjestikahela puhul ja Z LCR -rööpahela puhul. Toodud resonantsikõver vastab juhule $(1/R)\sqrt{L/C} = 6$.



Joonis 63: vt ülesanne 159.

7 Laetud osakeste liikumine elektri- ja magnetväljas

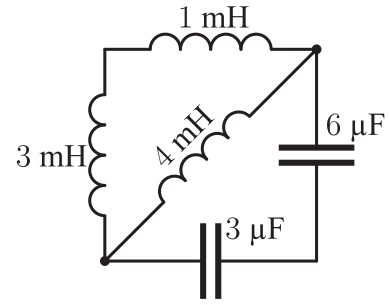
7.1 Laetud osakeste liikumine vaakumis

Jaotises 4.4 me juba mainisime, et magnetväli \mathbf{B} mõjub kiirusega \mathbf{v} liikuvale punktlaengule q Lorentzi jõuga $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. On kerge näha, et muude tungide puudumisel liigub osake homogeenses magnetväljas üldjuhul mööda kruvijoont. Vaatleme laetud osakese q liikumist vabas ruumis, kus eksisteerivad üheaegselt nii elektri- kui ka magnetväli. Sellise situatsiooni analüüsimisel võivad kasuks tulla järgmised tähelepanekud.

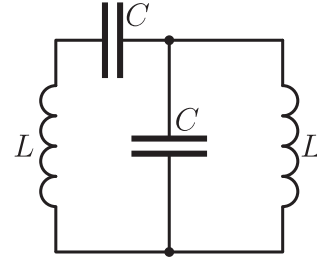
1. Lorentzi jõud ei tee tööd (sest $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$), seega laetud osakese potentsiaalne energia on määratud ainult elektrivälja jaotusega ruumis.
2. Pöörame koordinaatteljed nõnda, et magnetväli \mathbf{B} oleks rakendatud z -telje positiivses suunas. Newtoni II seadusest ja Lorentzi jõu avaldisest järelduvad osakese jaoks siis järgmised liikumisvõrrandid:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_x + qv_y B, \quad \frac{dp_y}{dt} = qE_y - qv_x B, \quad \frac{dp_z}{dt} = qE_z.$$

Kui nüüd $E_x = 0$ või $E_y = 0$, siis vastavalt $p_x - qyB =$



Joonis 64: vt ülesanne 160.



Joonis 65: vt ülesanne 161.

Const või $p_y + qxB = \text{Const}$ (peale integreerimist aja järgi). Teisisõnu, säilivad üldistatud impulsid $p'_x = p_x - qyB$ ja $p'_y = p_y + qxB$.

3. Vaatleme laetud osakese liikumist homogeenses magnetväljas \mathbf{B} . Olgu L osakese impulsimoment mingi \mathbf{B} -ga paralleelse telje suhtes. Eeldame, et kõik osakesele mõjuvad tungid peale Lorentzi jõu on nimetatud telje suhtes radiaalsed. Olgu mingil hetkel osakese kaugus teljest r ja radiaalne kiirus v_r . Arvestades, et raadiusvektoriga ristuv Lorentzi jõu komponent on $-qv_r B$, saame $dL/dt = (-qv_r B)r = -\frac{1}{2}qB(dr^2/dt)$ ehk peale aja järgi integreerimist $L = -\frac{1}{2}qB\dot{r}^2 + \text{Const}$. Järelikult suurus $L + \frac{1}{2}qB\dot{r}^2$ on osakese mistahes liikumise vältel konstantne.
4. Laengute ja voolude poolt tekitatav väli sõltub sellest, millises taustsüsteemis seda välja vaadeldakse. Näiteks paigalseisev punktlaeng tekitab ainult elektrivälja, aga taustsüsteemis, mis liigub kiirusega \mathbf{v} selle laengu suhtes, registreeritakse lisaks elektriväljale ka magnetvälja (valem 6). Relativistlike kiiruste puhul ka laengu- ja voolutihedused sõltuvad sellest, millises taustsüsteemis neid mõõdetakse (tuletame relatiivsusteooriast meelde ruumi kontraktsiooni ja aja dilatsiooni nähtusi). Laeng ise, nagu seisumasski, on invariantne.

Olgu meil kaks inertsiaalset taustsüsteemi, mille vastavad koordinaatteljed on paralleelsed. Süsteemi K' alguspunkt liikugu piki x -telge kiirusega u . Defineerime $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Mitterelativistlikul juhul $\gamma \rightarrow 1$. Väljavektorid teisenevad üleminekul $K \rightarrow K'$ järgmise eeskirja kohaselt:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - uB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + uB_y),$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \frac{u}{c^2}E_z), \quad B'_z = \gamma(B_z - \frac{u}{c^2}E_y).$$

Uurides laetud osakeste liikumist elektromagnetväljas, on sageli mõttekas otsida ülesande lahendamiseks selline taustsüsteem, kus mõni väljakomponent on null.

162 Elektron kiirusega v liigub homogeenses magnetväljas B , kusjuures $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Leidke elektroni trajektoori raadius.

Vastus: $R = mv/(eB)$.

163 Elektronide kimp alustab liikumist ühest ja samast ruumipunktist. Elektronide kiirused v alghetkel on mooduli poolest võrdsed kuid nende suunad hajuvad kuni α suuruse nurga all ruumis tekitatud homogeense magnetvälja B sihi suhtes, kusjuures $\alpha \ll 1$. Kui suurel kaugusel L nimetatud ruumipunktist toimub elektronide kimbu järjekordne fokuseerumine?

Vastus: $L = 2\pi mv/(eB)$.

164 Kaks tasaparalleelset elektroodi (katoode ja anood) paiknevad vaakumis üksteisest kaugusel d . Anoodile on rakendatud katoode suhtes positiivne potentsiaal U . Katoode pinnalt alustab elektrivälja toimele nullise algkiirusega liikumist elektron. Kui tugev elektriväljaga ristuv magnetväli B tuleb elektroodidevahelises ruumis tekitada, et elektron ei jõuaks enam anoodile?

Vastus: $B = (1/d)\sqrt{2mU/e}$.

165 Ruum kahe koaksiaalse silindrikujulise elektrijuhi vahel on õhust tühjaks pumbatud. Sisemise silindri (katoode) raadius on a , välise silindri (anoodi) sisemine raadius aga b . Anoodile on antud katoode suhtes positiivne potentsiaal U . Silindritevahelises ruumis on homogeenne magnetväli B , mis on paralleelne silindrite teljega. Katoode pinnalt alustab elektrivälja toimele nullise algkiirusega liikumist elektron. Leidke B kriitiline väärtus, millest alates elektron ei jõua enam anoodile.

Vastus: $B = \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$.

166 Elektron algkiirusega v_0 liigub homogeenses magnetväljas. Vektorid \mathbf{v}_0 , \mathbf{E} ja \mathbf{B} on kõik omavahel risti ja $\hat{\mathbf{v}}_0 = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{E}}$. Milline on elektroni trajektoori keskmise kiiruse $\langle v \rangle$? Võib lugeda, et $E/B \ll c$ ja $v \ll c$.

Vastus: $\mathbf{r}(t) = \langle v \rangle t + R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{v}}_0 + R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{E}}$, kus $R = mv_0/eB$, $\omega = v_0/R = eB/m$ ja $\langle v \rangle = \frac{E}{B} \hat{\mathbf{v}}_0$. Saadud trajektoori nimetatakse tsükloidiks.

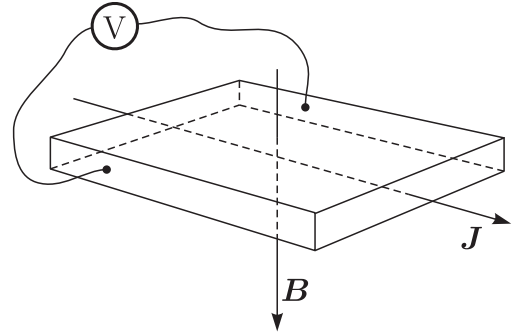
7.2 Laengukandjate liikumine elektrijuhis

Sirgvoolust keerukamate voolude korral ei pruugi voolu jaotus olla juhi igas punktis sama (nt radiaalne vool sfäärilises või silindrilises juhis). Detailsemalt võib voolu jaotust iseloomustada *voolutihedusega* \mathbf{J} . \mathbf{J} on vektor, mille moodul võrdub laenguga, mis ajaühikus kandub läbi voolu suunaga risti asetatud ühikpinna, ja mille suund näitab positiivsete laengukandjate liikumise suunda. Ühtlase ristlõikega S juhi puhul ilmselt $J = I/S$. Lihtne arvutus näitab, et \mathbf{J} on määratud laengukandjate kontsentratsiooniga n , laenguga q ja triivikiirusega \mathbf{v} järgmiselt: $\mathbf{J} = qn\mathbf{v}$. (Triivikiirus on laengukandja keskmine kiirus rakendatud välja mõju all.)

Voolutiheduse kasutamisel on mõistlik ka Ohmi, Joule'i-Lenzi ja Ampere'i seaduse rakendamine diferentsiaalsel kujul. On kerge kontrollida, et \mathbf{J} kaudu omandab Ohmi seadus kuju $\mathbf{J} = \mathbf{E}/\rho$, kus ρ on aine eritakistus. Kui juht liigub magnetväljas kiirusega \mathbf{v} , siis elektrijõule lisandub veel Lorentzi jõud, nii et üldisemalt $\mathbf{J} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})/\rho$. Analoogiliselt leiame, et

juhi ühikulises ruumalas dissipeeruv energia avaldub $J^2\rho$ ja vooluga juhi ühikruumalale mõjuv jõud magnetväljas avaldub $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Vaatleme joonisel 66 kujutatud situatsiooni. Alalisvooluga metall- või pooljuhtplaat on asetatud vooluga risti olevasse magnetvälja B . Triivikiirusega \mathbf{v} liikuvatele laengukandjatele mõjub Laorentzi jõud $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, mis on risti nii \mathbf{J} -ga kui ka \mathbf{B} -ga. Järelikult \mathbf{J} -ga ja \mathbf{B} -ga paralleelsete tahkude peale (mille külge joonisel on ühendatud voltmeeter) hakkavad kogunema laengud. Laengute kogunemine jätkub seni kuni nende poolt tekitatava elektrivälja mõju kompenseerib Lorentzi jõu. Seega jõudsime järeldusele, et magnetvälja toimele tekib plaadis täiendav ristsihiline elektriväli ja vastavate tahkude vahele ühendatud voltmeeter näitab potentsiaalide vahet. Seda nähtust nimetatakse Halli efektiks. Halli efektil on hulk rakendusi (magnetilise induktsiooni mõõtmine, laengukandjate omaduste uurimine pooljuhis jpm).



Joonis 66: Halli efekt.

167 Metallides loovutab iga aatom keskmiselt ühe juhtivuselektroni. Leidke elektronide triivikiirus vaskjuhtmes, kus voolutihedus on 5 A/mm^2 ! Vase tihedus on 8900 kg/m^3 ning aatommass $63,5 \text{ g/mol}$.

Vastus: $0,37 \text{ mm/s}$.

168 Kaks ühesugust metallkera (raadius r) on asetatud homogeensesse juhtivasse keskkonda, mille eritakistus on ρ . Kaugus kerade vahel on hulga suurem nende raadiusest. Kui suur on keradevaheline takistus? *Vihje.* Selle ja järgneva ülesande lahendamisel läheb tarvis ühte ideed jaotisest 1.4.

Vastus: $R = \rho/(2\pi r)$.

169 Pooljuhi eritakistuse määramisel on üheks probleemiks kontaktidel tekkivad tundmatud pingelangud. Sellest probleemist on võimalik üle saada järgmise meetodiga, mida me analüüsime siinkohal lihtsuse huvides poollõpmatu õhukese plaadi jaoks (plaadi paksus h). Olgu selle plaadi serva külge joodetud ridamisi neli kontakti nagu kujutatud joonisel 67. a) Kontaktidest A ja B lastakse läbi vool I . Näidake, et kontaktide C ja D vahele lülitatud voltmeeter näitab pinget

$$U = \frac{I\rho}{\pi h} \ln \frac{(a+b+c)b}{(a+b)(b+c)}.$$

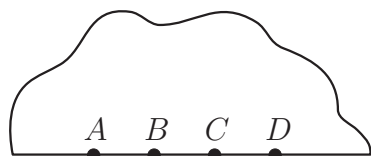
Tähistame suhte U/I sümboliga $R_{AB,CD}$. b) Näidake analoogiliselt, et juhul, kui voolu lastakse läbi kontaktidest B ja C ning pinget mõõdetakse kontaktide A ja D vahel, siis

$$R_{BC,AD} = \frac{\rho}{\pi h} \ln \frac{(a+b)(b+c)}{ac}.$$

c) Näidake, et

$$\exp(\pi h R_{AB,CD}/\rho) + \exp(\pi h R_{BC,AD}/\rho) = 1.$$

Saadud seos võimaldab ρ määrata peale suuruste $R_{AB,CD}$ ja $R_{BC,AD}$ mõõtmist. Viimased ei sõltu enam kontaktide takistustest, sest need on hulga väiksemad kui voltmeetri siseta-
kistus.



Joonis 67: vt ülesanne 169.

170 Järgnevalt kirjeldatava meetodiga on võimalik mõõta materjali eritakistust ilma et oleks tarvis kinnitada kontakte materjali külge. Kettakujuliseks prepareeritud ainetükk asetatakse solenoidi sisemuses tekitatavasse homogeensesse magnetvälja, nii et ketta telg on paralleelne solenoidi teljega. Solenoidi toidetakse vahelduvvooluga sagedusel ω , nii et $B(t) = B_0 \cos \omega t$. Ketta raadius on R ja paksus d . Leidke ketta materjali eritakistus, kui kettas eraldub Joule'i soojus võimsusega P . Märkus. Tarvis võib minna valemit $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ ja integraali $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$.

Vastus: $\rho = \pi R^4 B_0^2 \omega^2 / (16P)$.

171 Metallplaat asetseb homogeenses magnetväljas \mathbf{B} , mis on risti tema pinnaga. Hinnake plaadis indutseeritud pöörisevoolude poolt tingitud takistusjõudu, kui plaat liigub kiirusega \mathbf{v} , mis on risti \mathbf{B} -ga. Plaadi pindala on S , paksus d ning materjali eritakistus ρ . Juhtnõör. Hinnangulise vastuse saamiseks on mitu teed. Üks võimalus on kasutada energia jäävust, hinnates pöörisevoolude tõttu plaadis tekkivat Joule'i soojust ja arvestades, et see soojus saadakse plaadi kulgliikumise kineetilise energia arvelt.

Vastus: $F \sim B^2 v S d / \rho$.

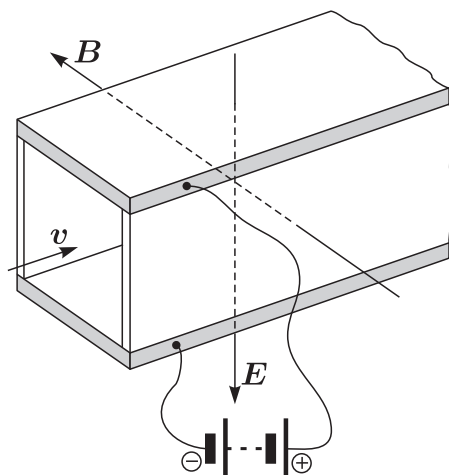
172 Leidke Halli efekti tõttu tekkiva ristisihilise elektrivälja tugevus joonisel 66 kujutatud olukorra jaoks. Võib lugeda, et materjal eksisteerib ainult ühte tüüpi laengukandjaid, mille laeng on q ja kontsentratsioon n .

Vastus: $\mathbf{E} = (1/nq)\mathbf{B} \times \mathbf{J}$; seega metallides, kus n on suur, avaldub Halli efekt nõrgalt.

173 Pooljuhtseadet, mis Halli efekti vahendusel mõõdab magnetilise induktsiooni väärtust, nimetatakse Halli anduriks. Koosta vattmeetri elektriskeem, kui kasutada on Halli andur, solenoid ja voltmeeter.

174 Hea elektrijuhtivusega vedelike pumpamiseks saab kasutada elektromagnetilist pumpa, mille tööpõhimõte selgub jooniselt 68. Vedelik eritakistusega ρ liigub pumbas kiirusega \mathbf{v} . Vektorid \mathbf{v} , \mathbf{B} ja \mathbf{E} on kõik omavahel risti. a) Näidake, et vedelikule mõjub ühikulise ruumala kohta jõud $\mathbf{F} = B^2(\mathbf{u} - \mathbf{v})/\rho$, kus $\mathbf{u} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. b) Näidake, et seadme maksimaalne kasutegur küündib 0,5-ni. Võib lugeda, et magnetvälja tekitab püsomagnet ja ääre-efektid on tühisid.

175 Homopolaarne mootor koosneb võllile kinnitatud vaskkettast, mis saab pöörelda homogeenses aksiaalses magnetväljas \mathbf{B} . Vool suundub kettasse läbi võlli ning väljub kettast



Joonis 68: vt ülesanne 174.

külgpinna kaudu. Võlli raadius on a , ketta raadius b ning ketta paksus h . Ketta materjali eritakistus on ρ . a) Leidke magnetvälja poolt kettale avaldatav pöördemoment M volutugevusel I ; b) Leidke kettas dissipeeruv Joule'i soojus P volutugevusel I ; c) Leidke pinge U ketta telje ja serva vahel, kui ketta nurkkiirus on ω ; d) Näidake, et kehtib energia jäävuse seadus kujul $VI = M\omega + P$. Märkus. Ülesanne nõuab paari lihtsa integraali võtmist: $\int x dx = x^2/2$, $\int (1/x) dx = \ln x$.

Vastus: a) $M = BI(b^2 - a^2)/2$; b) $P = I^2 \rho \ln(b/a)/(2\pi h)$; c) $V = \omega B(b^2 - a^2)/2 + I \rho \ln(b/a)/(2\pi h)$.