Fourier' analüüsi valemid

26. september 2004. a.

Fourier' rida

Olgu $f(x+\lambda) = f(x)$ ja $k \equiv 2\pi/\lambda$.

Teoreem. (Perioodilise funktsiooni Fourier' rea koonduvuse piisavad tingimused.) Kui $f(x)$ ja $f'(x)$ on tükati pidevad, siis[1]

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[f(x-)+f(x+)] = \frac{1}{\lambda}\int_\lambda f(x)dx \quad &+ \quad \frac{2}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\cos(mkx)\int_\lambda f(x')\cos(mkx')dx' \\ &+ \quad \frac{2}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\sin(mkx)\int_\lambda f(x')\sin(mkx')dx'.\end{aligned}$$

Rittaarendus $\sin mkx$ $\cos mkx$ järgi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mkx,$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda}\int_\lambda f(x)\cos(mkx)dx, \quad B_m = \frac{2}{\lambda}\int_\lambda f(x)\sin(mkx)dx.$$

Rittaarendus $\cos(mkx+\phi_m)$ järgi[2]

$$f(x) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(mkx+\phi_m),$$

$$C_0 = \frac{A_0}{2}, \quad C_m = \sqrt{A_m^2+B_m^2}, \quad \cos\phi_m = \frac{A_m}{C_m}, \quad \sin\phi_m = -\frac{B_m}{C_m}.$$

Rittaarendus $\exp(imkx)$ järgi[3]

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{imkx}, \quad F_m = \frac{1}{\lambda}\int_\lambda f(x)e^{-imkx}dx.$$

[1] $\int_\lambda$ tähistab integraali üle suvalise lõigu pikkusega λ; $f(x+)$ tähistab piirväärtust paremalt jne.
[2] Tõestuseks kasutada summa koosinuse valemit: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
[3] Tõestuseks kasutada Euleri valemit: $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Fourier' integraalteisendus

Teoreem. (Funktsiooni Fourier' integraalesituse koonduvuse piisavad tingimused.) Kui $f(x)$ ja $f'(x)$ on tükati pidevad ning $f(x)$ on absoluutselt integreeruv vahemikus $(-\infty, \infty)$, siis

$$\frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'}.$$

Defineerime Fourier' teisenduse ning pöördteisenduse operaatorid järgmiselt:[4]

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk.$$

Fourier' teisenduse omadused

Olgu $f(x), g(x)$ suvalised funktsioonid ja tähistame $\mathcal{F}[f(x)] = F(k)$, $\mathcal{F}[g(x)] = G(k)$. Lisaks defineerime funktsioonide $f(x)$ ja $g(x)$ sidumi

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') g(x - x') dx',$$

funktsiooni $f(x)$ spektraalse energiatiheduse

$$S_f(k) = |F(k)|^2$$

ja funktsioonide $f(x)$, $g(x)$ korrelatsioonifunktsiooni

$$A_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')^* g(x' + x) dx'.$$

1. Lineaarsus:
$$\mathcal{F}[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha \mathcal{F}[f_1(x)] + \beta \mathcal{F}[f_2(x)].$$

2. Kui $f(x)$ on reaalne, siis $F(k)^* = F(-k)$.

   Tõestus.
$$F(k)^* = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = F(-k).$$

3. Kui $f(x)$ on reaalne ja paarisfunktsioon, siis ka $F(k)$ on reaalne ja paarisfunktsioon.

   Tõestus. Eelmise omaduse tõestuskäiku edasi arendades:
$$\begin{aligned} F(-k) &= F(k)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \\ &\overset{x \to (-x)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= F(k). \end{aligned}$$

[4] Kui x väljendab ruumikoordinaati, siis suurust k tuleb tõlgendada kui lainearvu. Alternatiivselt võib x asemel kasutada aega t ja k asemel sagedust ω. Imaginaarühiku ees oleva märgi valik ning kordaja $1/2\pi$ paigutus on samuti kokkuleppe küsimus.

4. Modulatsioonikujutis:

$$\mathcal{F}\left[e^{iKx}f(x)\right] = F(k-K).$$

Tõestus.

$$\mathcal{F}\left[e^{iKx}f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx}f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-K)x}dx = F(k-K).$$

5. Nihkekujutis:

$$\mathcal{F}[f(x+a)] = e^{ika}F(k).$$

Tõestus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x+a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)e^{-ikx}dk \\
&\overset{(x+a)\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik(x-a)}dt \\
&= e^{ika}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= e^{ika}F(k).
\end{aligned}$$

6. Sarnasus:

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{F(k/a)}{|a|}.$$

Tõestus. Eeldame, et $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx}dx \\
&\overset{ax\to x}{=} \frac{1}{\operatorname{sign}(a)|a|}\int\limits_{-\operatorname{sign}(a)\infty}^{\operatorname{sign}(a)\infty} f(x)e^{-ikx/a}dx \\
&= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx/a}dx \\
&= \frac{F(k/a)}{|a|}.
\end{aligned}$$

7. Tuletise kujutis:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right] = (-ik)^n F(k).$$

Tõestus. Integreerime ositi ja arvestame, et $f(\pm\infty) = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx}f(x)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}f(x)e^{-ikx}dx \\
&= f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{dx}e^{-ikx}dx \\
&= ik\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \\
&= (ik)^1 F(k).
\end{aligned}$$

8. Sidumi kujutis:
$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(k)G(k).$$

Tõestus. Vahetame kahekordses integraalis integreerimise järjekorra:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(x) * g(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x-x')g(x') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, g(x') \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x-x')e^{-ikx} \\
&\overset{(x-x')\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, g(x') \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ik(x+x')} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, g(x')e^{-ikx'}\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx}\right] \\
&= G(k)F(k).
\end{aligned}$$

9.
$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi}F(k) * G(k).$$

Tõestus. Kujul
$$\mathcal{F}^{-1}[F(k) * G(k)] = 2\pi f(x)g(x)$$
on selle omaduse tõestus täiesti analoogne eelmise omaduse tõestusega.

10. Parsevali teoreem:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(k)dk.$$

Tõestus.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(k)dk &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, F(k)F(k)^* \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^* e^{ikx'} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^* \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(x'-x)}
\end{aligned}$$

Fourier' teisenduse ja pöördteisenduse definitsiooni alusel on kerge veenduda, et[5]
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} = \delta(x),$$

[5]Selles võib veenduda ka teisel teel. Selleks toome esialgu sisse väikese parameetri $\varepsilon > 0$, mis kindlustab integraali koonduvuse:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{0} dk\, e^{ikx+\varepsilon k} + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty} dk\, e^{ikx-\varepsilon k} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\varepsilon} + \frac{1}{-ix+\varepsilon}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \\
&= \delta(x).
\end{aligned}$$

(Funktsioon $\varepsilon/\pi(x^2+\varepsilon^2)$ on ühikpindalaga lorentziaan poollaiusega ε, mis $\varepsilon \to 0$ korral läheneb δ-funktsioonile.)

seega

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^*\delta(x'-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)f(x)^*.$$

11.
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} G(k)f(k)dk.$$

12.
$$\mathcal{F}[A_{ff}(x)] = S_f(k).$$

Tõestus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[A_{ff}(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, A_{ff}(x)e^{-ikx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^* f(x'+x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x'+x)e^{-ikx} \\
&\overset{(x'+x)\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')^* e^{ikx'}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')e^{-ikx'}\right]^*\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-ikx} \\
&= F(k)^*F(k) \\
&= S_f(k).
\end{aligned}$$

13.
$$\mathcal{F}[S_f(k)] = A_{ff}(x)^*.$$

14. Sümmeetria:
$$\mathcal{F}[F(k)] = 2\pi f(-x),$$
$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}F(-k).$$

Mõningate funktsioonide Fourier' kujutised

1. Heaviside'i ühik-astme Fourier' kujutis:

$$\mathcal{F}[\theta(x)] = \pi\delta(k) - \frac{i}{k}.$$

Tõestus. Arvutame esialgu Fourier' teisenduse funktsioonist $\theta(x)e^{-\varepsilon x}$, kus $\varepsilon > 0$ on väike reaalne parameeter:

$$\mathcal{F}[\theta(x)e^{-\varepsilon x}] = \int_0^{\infty} e^{-ikx-\varepsilon x}dx = \frac{1}{\varepsilon + ik} = \frac{\varepsilon - ik}{\varepsilon^2 + k^2}$$

Nüüd

$$\mathcal{F}[\theta(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{F}[\theta(x)e^{-\varepsilon x}] = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+k^2} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{ik}{\varepsilon^2+k^2} = \pi\delta(k) - \frac{i}{k}.$$

2. Gaussi funktsiooni Fourier' kujutis:

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] = \sqrt{\pi}e^{-k^2/4}.$$

Tõestus. Teisendame esmalt eksponendis oleva avaldise täisruuduks:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - ikx)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - ikx + \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{4}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x + \frac{ik}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4}\right] dx.
\end{aligned}$$

Läheme nüüd üle integreerimisele üle kompleksse muutuja

$$z = x + \frac{ik}{2}, \quad dz = dx.$$

Siis

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] = \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right) \int_{-\infty+ik/2}^{\infty+ik/2} \exp\left(-z^2\right) dz.$$

Seega integreerimine toimub komplekstasandil mööda abstsiss-teljega paralleelset sirget, mille ordinaat on $k/2$. On teada, et komplekstasandi piirkonnas, kus integraalialune funktsioon on regulaarne, on joonintegraal kontuuri valikust sõltumatu. Antud juhul on otstarbekas valida

$$\int_{-X-iY}^{+X-iY} \to \int_{-X-iY}^{-X} + \int_{-X}^{+X} + \int_{+X}^{+X-iY}.$$

Piiril $X \to \infty$ saame

$$\int_{-\infty+ik/2}^{\infty+ik/2} \exp\left(-z^2\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-z^2\right) dz = \sqrt{\pi}.$$

3. Eksponentsiaalse kustumise Fourier' kujutis:

$$\mathcal{F}\left[\theta(x)e^{-x}\right] = \frac{1}{1+ik}.$$

Tõestus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\theta(x)e^{-x}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{-x}e^{-ikx}dx \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ik)x}dx \\
&= \frac{1}{1+ik}.
\end{aligned}$$

4. Lorentzi funktsiooni Fourier' kujutis:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \pi\left[e^k\theta(-k) + e^{-k}\theta(k)\right].$$

Tõestus. Rakendades eksponentsiaalsele kustumisele omadust 6, saame

$$\mathcal{F}\left[\theta(-x)e^{x}\right] = \frac{1}{1-ik}.$$

Nüüd FT lineaarsuse tõttu

$$\mathcal{F}\left[\theta(x)e^{-x} + \theta(-x)e^{x}\right] = \frac{1}{1+ik} + \frac{1}{1-ik} = \frac{2}{1+k^2}.$$

Edasi rakendame omadust 14, vahetades ära x ja k rollid:

$$\mathcal{F}\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 2\pi\left[e^{k}\theta(-k) + e^{-k}\theta(k)\right].$$

5.
$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = -i\pi\,\mathrm{sign}(k).$$

Tõestus. Rakendame $\theta(x)$ kujutisele FT omadust 14:

$$\pi\mathcal{F}[\delta(k)] - i\mathcal{F}\left[\frac{1}{k}\right] = 2\pi\theta(-x),$$

millest

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x}\right] = i2\pi\theta(-k) - i\pi = i\pi\,\mathrm{sign}(-k) = -i\pi\,\mathrm{sign}(k).$$

(Siin on kasutatud võrdust $\mathrm{sign}(x) + 1 = 2\theta(x)$.)

Funktsioon[6]	Fourier' kujutis
$\cos(Kx+\phi)$	$\pi e^{-i\phi}\delta(K+k)+\pi e^{i\phi}\delta(K-k)$
$\sin(Kx+\phi)$	$i\pi e^{-i\phi}\delta(K+k)-i\pi e^{i\phi}\delta(K-k)$
e^{iKx}	$2\pi\delta(K-k)$
1	$2\pi\delta(k)$
$\delta(x)$	1
$\theta(x)$	$\pi\delta(k)-\dfrac{i}{k}$
$\operatorname{sign}(x)$	$-2i/k$
$\theta(x+a)-\theta(x-a)$ (kastsignaal)	$2\dfrac{\sin ak}{k}=2a\operatorname{sinc} ak$
$\dfrac{x+a}{a}\theta(x+a)-\dfrac{2x}{a}\theta(x)+\dfrac{x-a}{a}\theta(x-a)$ (kolmnurksignaal)	$\dfrac{2}{ak^2}(1-\cos ak)$
$\theta(x)e^{-x}$	$\dfrac{1}{1+ik}$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-k^2/4}$
$1/x$	$-i\pi\operatorname{sign}(k)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\pi\left[e^k\theta(-k)+e^{-k}\theta(k)\right]$
$\theta(x)e^{-\gamma x}\cos Kx$ (sumbuv siinusvõnkumine)	$\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{\gamma+i(k+K)}+\dfrac{1}{\gamma+i(k-K)}\right]$
$\operatorname{sinc} x$	$\pi\left[\theta(k+1)-\theta(k-1)\right]$

δ-funktsioon

δ-funktsiooni defineerivad fundamentaalsed seosed:

1. $\delta(x)=0$, kui $x\neq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0)$ suvalise funktsiooni $f(x)$ puhul

[6]Tükati pidevaid (või tükati analüütiliselt esitatavaid) funktsioone on mugav esitada Heaviside'i funktsiooni kaudu:

$$f(x)=\sum_n \theta(x-x_n)\theta(x_{n+1}-x)f_n(x),$$

kus summeerimine toimub üle kõigi pidevate vahemike (x_n,x_{n+1}), kus funktsioon on antud analüütiliselt kui $f_n(x)$. Avaldise lihtsustamisel võib kasutada seost $\theta(x-a)+\theta(a-x)=1$.

δ-funktsiooni omadusi

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

Tõestus.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx \overset{x-a\to x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)\delta(x)dx = f(a).$$

2.
$$\delta(-x) = \delta(x).$$

3.
$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x).$$

4.
$$\delta(x) * f(x) = f(x).$$

Tõestus.
$$\delta(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x')f(x-x')dx' = f(x).$$

5.
$$\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b).$$

6.
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Tõestus.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx \overset{ax\to x}{=} \frac{1}{\operatorname{sign}(a)|a|} \int\limits_{-\operatorname{sign}(a)\infty}^{\operatorname{sign}(a)\infty} f(x/a)\delta(x)dx = \frac{f(0)}{|a|}.$$

7.
$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|},$$

kus x_n on funktsiooni $g(x)$ nullkohad.

Tõestus. $\delta[g(x)]$ on nullist erinev vaid $g(x)$ nullkohtadel. Nullkoha x_n ümbruses võime funktsiooni $g(x)$ lineariseerida:
$$g(x) \approx g(x_n) + g'(x_n)(x-x_n) = g'(x_n)(x-x_n).$$

Nüüd
$$\delta[g(x)] = \sum_n \delta[g'(x_n)(x-x_n)] = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|g'(x_n)|}.$$

8.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

Tõestus. Integreerime ositi, arvestades et $\delta^{(n)}(x) = 0$, kui $x \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\delta(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, df(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0).$$

Seda saab näidata ka teisel teel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\delta(x+h)-\delta(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{h} = -f'(0).$$

9.
$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x).$$

Tõestus.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^n\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)x^n\right]_{x=0}.$$

Korrutise tuletise kirjutame lahti vastavalt binoomvalemile[7] ja arvestame, et $x = 0$ puhul säilivad vaid need liikmed mis x-i astmeid ei sisalda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^n\delta^{(n)}(x)dx = (-1)^n\left[\binom{n}{n}f(x)\frac{d^n}{dx^n}x^n\right]_{x=0} = (-1)^n n! f(0).$$

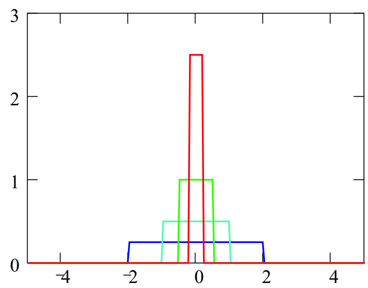
10.
$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x).$$

Tõestus. Vaatleme δ-funktsiooni kui kastfunktsiooni piirjuhtu:

$$\delta(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}[\theta(x+h)-\theta(x-h)] = \theta'(x).$$

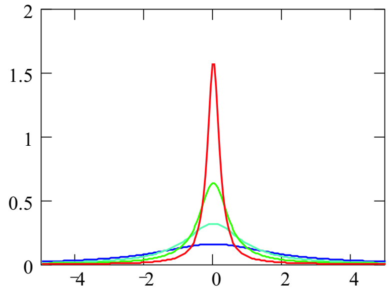
δ-funktsiooniks koonduvaid piirprotsesse

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}[\theta(x+\varepsilon)-\theta(x-\varepsilon)]$$

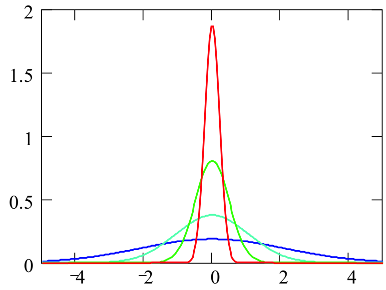


[7]
$$\frac{d^n}{dx^n}uv = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$$

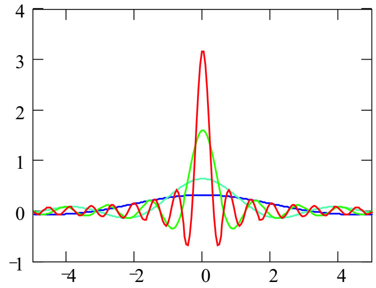
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$



$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$



$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$



$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$