

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$$

Kristjan Kannike

11. september 2015. a.

Tsükliline rühm \mathbb{Z}_6 on \mathbb{Z}_2 ja \mathbb{Z}_3 otsekorrutis. Kuidas on seotud nende esitused?

\mathbb{Z}_2 ja \mathbb{Z}_3 esitused on \mathbb{Z}_6 esitustega seotud kui

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow 0, \\ (1, 1) &\rightarrow 1, \\ (0, 2) &\rightarrow 2, \\ (1, 0) &\rightarrow 3, \\ (0, 1) &\rightarrow 4, \\ (1, 2) &\rightarrow 5, \end{aligned} \tag{1}$$

ehk üldiselt

$$(x, y) \rightarrow (ax + by) \pmod{6}, \tag{2}$$

kus $a = 3$ ja $b = 4$.

Raamatus [1] on selgitatud, et kordajad a ja b leitakse tähelepanekust, et kui $(1, 0) \rightarrow a$ ja $(0, 1) \rightarrow b$, siis $(x, y) \rightarrow (ax + by) \pmod{6}$. Nõnda saab a ja b leida võrranditest

$$a = 1 \pmod{2}, \quad a = 0 \pmod{3}, \quad b = 0 \pmod{2}, \quad b = 1 \pmod{3}. \tag{3}$$

Võime seost $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_6$ visualiseerida kui

$$\begin{array}{c} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \\ 1 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 2 \qquad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \cdot \\ \diagup \quad \diagdown \\ 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 0 \end{array} \tag{4}$$

Pange tähele, et $4 = -2 \pmod{6}$ and $5 = -1 \pmod{6}$ on kooskõlas sellega, et esitus 4 on \mathbb{Z}_6 esituse 2 kaaskompleks ja 5 on 1 kaaskompleks.

Viited

- [1] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2nd ed., 1994.