Kompleksse singleti vaakumi stabiilsus

Kristjan Kannike

13. aprill 2018. a.

Puu-taseme vaakumi stabiilsuse tingimuste tuletamiseks on õige mitu viisi. Suurte välja väärtuste piirjuhul on massi- ja kuupliikmed väikesed ja nendega ei pea arvestama – piisab neljandat järku liikmetest. Hea näide on lihtsaim mittetriviaalne neljandat järku potentsiaal, ilma otsese CP-rikkumiseta (kõik sidurid on reaalsed) kompleksse singleti S potentsiaal:

$$V = \lambda_S |S|^4 + \frac{\lambda'_S}{2}(S^4 + S^{\dagger 4}) + \frac{\lambda''_S}{2}|S|^2(S^2 + S^{\dagger 2}). \tag{1}$$

Võime kirjutada S komponentväljad kas rist- või polaarsetes koordinaatides,

$$S = \frac{S_R + i S_I}{\sqrt{2}} = s e^{i\phi_S}, \tag{2}$$

mis puhul potentsiaal omandab kuju

$$V = \frac{1}{4}\left[(\lambda_S + \lambda'_S + \lambda''_S) S_R^4 + 2(\lambda_S - 3\lambda'_S) S_R^2 S_I^2 + (\lambda_S + \lambda'_S - \lambda''_S) S_I^4\right] \tag{3}$$

või

$$V = \left(\lambda_S + \lambda'_S \cos 4\phi_S + \lambda''_S \cos 2\phi_S\right) s^4. \tag{4}$$

Valemist (3) saame (S_R^2, S_I^2) baasis välja kirjutada neljandat järku sidurite maatriksi:

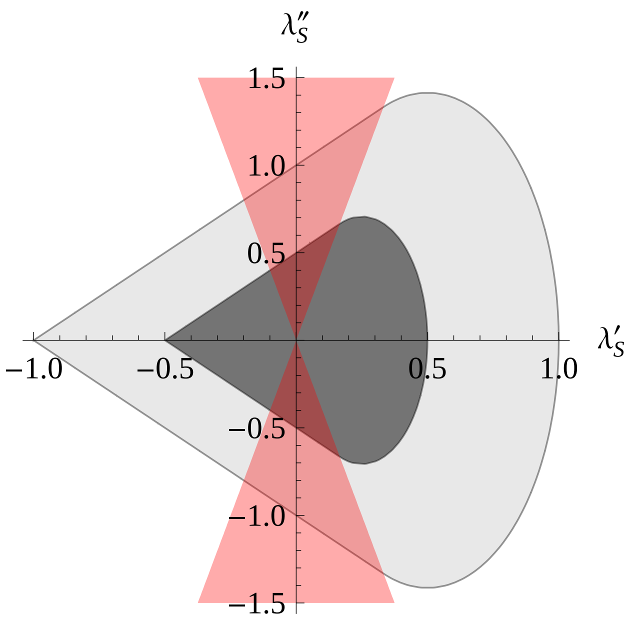
$$\Lambda = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda_S + \lambda'_S + \lambda''_S & \lambda_S - 3\lambda'_S \\ \lambda_S - 3\lambda'_S & \lambda_S + \lambda'_S - \lambda''_S \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Kuna S_R^2 ja S_I^2 on mittenegatiivsed, peab Λ olema *kopositiivne*, et potentsiaal oleks alt tõkestatud [1]. Loomulikult peavad diagonaalelemendid olema positiivsed, kuna võime võtta eraldi kas S_R^2 või S_I^2 nulliks. Lisaks ei saa mittediagonaalne element olla liiga negatiivne. Kokkuvõttes on vaakumi stabiilsuse tingimused

$$\lambda_S + \lambda'_S + \lambda''_S \geqslant 0, \tag{6a}$$

$$\lambda_S + \lambda'_S - \lambda''_S \geqslant 0, \tag{6b}$$

$$\lambda_S - 3\lambda'_S + \sqrt{(\lambda_S + \lambda'_S)^2 - \lambda''^2_S} \geqslant 0. \tag{6c}$$



Joonis 1: Lubatud piirkond λ''_S vs. λ'_S tasandil, kui $\lambda_S = 1/2$ (tumehall) ja $\lambda_S = 1$ (helehall). Helepunases piirkonnas ei ole tõene (10) ja tingimus (9) ei kehti. Kui seda arvesse mitte võtta, jätaksime osa lubatud piirkonnast välja.

Samaväärselt võime nõuda, et s^4 kordaja valemis (4) peab olema positiivne. Kuna ϕ_S on vaba parameeter, tuleb potentsiaal selle suhtes minimiseerida. Ekstreemumi tingimus on

$$2\lambda'_S \sin 4\phi_S + \lambda''_S \sin 2\phi_S = (\lambda'_S + 4\lambda''_S \cos 2\phi_S) \sin 2\phi_S = 0, \tag{7}$$

mille lahendid on $\phi_S = \pm n\frac{\pi}{2}$ ja $\phi_S = \frac{1}{2}\left[\pm \arccos\left(-\frac{\lambda''_S}{4\lambda'_S}\right) + 2n\pi\right]$. Esimene lahend reprodutseerib

$$\lambda_S + \lambda'_S \pm \lambda''_S \geqslant 0, \tag{8}$$

kuna teine lahend annab

$$\lambda_S - \lambda'_S - \frac{\lambda''^2_S}{8\lambda'_S} \geqslant 0. \tag{9}$$

Pange tähele, et viimane tingimus peab kehtima ainult siis, kui arkuskoosinuse argument on oma määramispiirkonnas

$$-1 \leqslant -\frac{\lambda''_S}{4\lambda'_S} \leqslant 1. \tag{10}$$

Muide, Sylvesteri kriteerium annab üsna sarnased (kuid piiravamad) tingimused singleti enesevastastikmõju sidurite tavaliseks positiivsuseks:

$$8(\lambda_S - \lambda'_S)\lambda'_S - \lambda''^2_S \geqslant 0. \tag{11}$$

Lubatud piirkond on näidatud joonisel 1. Helepunases piirkonnas ei ole (10) tõene ja kehtib ainult (8). Kui nõuaksime seal ka tingimuse (9) kehtimist, jätaksime osa sellest piirkonnast aluseta välja.

Veel üks võimalus kopositiivsust määrata on Kaplani kriteerium: sümmeetriline maatriks A on kopositiivne siis ja ainult siis, kui ühelgi A printsipaalne alam-maatriks B pole omavektorit $v > 0$, millele vastav omaväärtus $\lambda \leqslant 0$. Selle eelis on, et seda saab kergesti üldistada [2] kopositiivsetele tensoritele [3]. Maatriksite jaoks langeb tensori karakteristlik võrrand

$$\Lambda v^{m-1} = \lambda v^{[m-1]}, \tag{12}$$

kus m on tensori Λ järk, kokku tavalise maatriksi karakteristliku võrrandiga (vektori $v^{[n]}$ iga element on v vastav element astmel n). Nagu maatriksitelgi, on kopositiivsete tensorite diagonaalsed elemendid positiivsed, andes (6a) and (6b). Lahendades karakteristliku võrrandi, leiame kahe omavektori ja neile vastavate omavektorite jaoks

$$(S_I^2)_\pm = \frac{-\lambda_S'' \pm \sqrt{(\lambda_S - 3\lambda_S')^2 + \lambda_S''^2}}{\lambda_S - 3\lambda_S'} S_R^2, \quad \lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(\lambda_S + \lambda_S' \mp \sqrt{(\lambda_S - 3\lambda_S')^2 + \lambda_S''^2}\right), \tag{13}$$

kus võime võtta $S_R^2 > 0$. Et Kaplani kriteerium oleks rahuldatud, peab kehtima

$$(S_I^2)_\pm > 0 \implies \lambda_\pm > 0, \tag{14}$$

muidugi koos tingimustega (6a) ja (6b), mis reprodutseerib joonise 1 hele- ja tumehalli piirkonna.

On veel üks, vähem üldine viis vaakumi stabiilsuse tingimuste tuletamiseks. Baasist $S_{R,I}^2$ saab üle minna baasi

$$s_0 = |S|^2 \quad \text{and} \quad s_1 = \frac{S^2 + S^{\dagger 2}}{2}. \tag{15}$$

Tõepoolest,

$$s_0 = \frac{S_R^2 + S_I^2}{2} \quad \text{and} \quad s_1 = \frac{S_R^2 - S_I^2}{2}, \tag{16}$$

ja saame avaldada

$$\frac{1}{2}(S^4 + S^{\dagger 4}) = 2\left(\frac{S^2 + S^{\dagger 2}}{2}\right)^2 - |S|^2 = 2s_1^2 - s_0^2. \tag{17}$$

Skalaarne potentsiaal omandab kuju

$$\begin{aligned} V &= \lambda_S s_0^2 + \lambda_S'(2s_1^2 - s_0^2) + \lambda_S'' s_0 s_1 \\ &\equiv \Lambda_{00} s_0^2 + 2\Lambda_{01} s_0 s_1 + \Lambda_{11} s_1^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Sidurite maatriks s_0, s_1 baasis on

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_S - \lambda_S' & \frac{\lambda_S''}{2} \\ \frac{\lambda_S''}{2} & 2\lambda_S' \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Definitsiooni järgi on $s_0 \geqslant 0$; samuti $s_0^2 - s_1^2 = S_R^2 S_I^2 \geqslant 0$ mis defineerib väljaruumis $SO(1,1)$ valguskoonuse, analoogselt kahe Higgsi dubleti mudeli $SO(1,3)$ valguskoonusega (vt. nt. [4] ja selle viiteid).[1] Saame tensori Λ diagonaliseerida "Lorentzi teisendusega"

$$\begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{01} & \Lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Tensoril Λ on ajasarnane omaväärtus Λ_0 ja ruumisarnane omaväärtus $-\Lambda_1$. Need on

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{00} - \Lambda_{11} + \sqrt{(\Lambda_{00} + \Lambda_{11})^2 - 4\Lambda_{01}^2}\right], \tag{21}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{00} - \Lambda_{11} - \sqrt{(\Lambda_{00} + \Lambda_{11})^2 - 4\Lambda_{01}^2}\right] \tag{22}$$

ehk

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2}\left[\lambda_S - 3\lambda'_S + \sqrt{(\lambda_S + \lambda'_S)^2 - \lambda''^2_S}\right], \tag{23}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\lambda_S - 3\lambda'_S - \sqrt{(\lambda_S + \lambda'_S)^2 - \lambda''^2_S}\right]. \tag{24}$$

Et vaakum oleks alt tõkestatud, on vaja [4]

$$\Lambda_0 \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \Lambda_0 \geqslant \Lambda_1. \tag{25}$$

Näeme, et $\Lambda_0 \geqslant 0$ vastab otse tingimusele (6c). Valemist $\Lambda_0 \geqslant \Lambda_1$ saame

$$(\lambda_S + \lambda'_S + \lambda''_S)(\lambda_S + \lambda'_S - \lambda''_S) > 0. \tag{26}$$

Mõlemad tegurid võivad olla korraga kas positiivsed või negatiivsed. Aga kui $\lambda''_S = 0$, siis $\Lambda_0 > \Lambda_1$ annab $\lambda_S + \lambda'_S > 0$. Järelikult peavad mõlemad tegurid olema positiivsed ja oleme reprodutseerinud kõik tingimused (6).

Viited

[1] K. Kannike, *Vacuum Stability Conditions From Copositivity Criteria*, *Eur.Phys.J.* **C72** (2012) 2093, [arXiv:1205.3781].

[2] Y. Song and L. Qi, *The necessary and sufficient conditions of copositive tensors*, arXiv:1302.6084.

[3] L. Qi, *Symmetric Nonnegative Tensors and Copositive Tensors*, arXiv:1211.5642.

[4] I. Ivanov, *Minkowski space structure of the Higgs potential in 2HDM*, *Phys.Rev.* **D75** (2007) 035001, [hep-ph/0609018].

[1] See töötab isegi otsese CP-rikkumise korral: võime kasutada S faasinihet, et kehtiks seos $\phi_{\lambda''_S} = \phi_{\lambda'_S}/2$.