

1. Mitmel viisil saab sirgele pingile paigutada 4 poissi ja 4 tüdrukut nii, et poleks kahte kõrvuti istuvat poissi ega kahte kõrvuti istuvat tüdrukut?
2. Mitmel viisil saab ümmarguse laua ümber paigutada 4 poissi ja 4 tüdrukut nii, et poleks kahte kõrvuti istuvat poissi ega kahte kõrvuti istuvat tüdrukut? Paigutused, mis saadakse üksteisest laua pööramisega, lugeda samaks.
3. Mitmel viisil saab ruudukujulise laua ümber paigutada 4 poissi ja 4 tüdrukut nii, et poleks kahte kõrvuti istuvat poissi ega kahte kõrvuti istuvat tüdrukut? Laua igal küljel on ruumi kahele inimesele. Paigutused, mis saadakse üksteisest laua pööramisega, lugeda samaks.
4. Numbritest 0 ja 1 koostatakse kõikvõimalikud  $n$ -kohalised arvud, mis sisaldavad täpselt  $k$  ühte ( $k < n$ ). Mitmel viisil saab nende hulgast valida kaks arvu, milles nullid asuvad kõik erinevatel kohtadel?
5. Mitmel viisil saab numbritest 0 ja 1 koostada  $n$ -kohalise järjendi, milles leidub  $k$ -kohaline ainult ühtedest koosnev alamjärjend, kuid ei leidu  $(k + 1)$ -kohalist?
6. Tasand võrrandiga  $x + y + z = 20$  läbib teiste seas ka selliseid punkte, mille kõik koordinaadid on positiivsed täisarvud. Kui palju niisuguseid punkte see tasand läbib?
7. Malelaua vasakul alumisel ruudul  $a1$  asub kuningas, millel lubatakse ühe käiguga liikuda ainult kas sammu võrra paremale või sammu võrra üles. Mitu võimalikku teekonda saab kuningas valida, et jõuda laua paremale ülemisele ruudule  $h8$ ? Mitu erinevat teekonda on siis, kui malelaua mõõtmed on  $k \times l$ ?

8. Tõestada võrdus

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

9. Tõestada võrdus

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}.$$

10. Leida summa

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

11. Leida summa

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^{i_1} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}} \sum_{i_n=1}^{i_{n-1}} 1.$$

12. Koostada efektiivne algoritm, et loendada sõnad pikkusega  $n$ , mis koosnevad tähtedest A, B, C ja D ning mis sisaldavad paaritu arvu tähti A. (Hea tulemus on algoritm, mille tööaeg on  $O(n)$  ja mäluvajadus  $O(1)$ . Väga hea tulemus on algoritm, mille tööaeg on samuti  $O(1)$ .)

Ülesanded pärinevad Reimo Palmi raamatust "Diskreetse matemaatika elemendid" (TÜ, 2003). Samast leiate vajadusel ka abi lahendamiseks.

1. Vaatleme  $n$ -elemendilise hulga  $n$ -permutatsioonide leksikograafilist järjekorda. Kirjutada programmid, mis leiavad

- antud permutatsiooni järjekorranumbri;
- antud järjekorranumbrile vastava permutatsiooni.

2. Nimetame permutatsiooni “nunnuks”, kui selle iga element teisest kuni eelviimaseni on kas oma mõlemast naabrist väiksem või mõlemast suurem. Teisisõnu, permutatsioon on “nunu”, kui selles on järjestikuste elementide paarid kordamööda kasvavas ja kahanevas järjekorras. Näiteks 1, 3, 2, 4 on “nunu”, aga 1, 3, 4, 2 ei ole.

Vaatleme  $n$ -elemendilise hulga “nunnude”  $n$ -permutatsioonide leksikograafilist järjekorda. Kirjutada programmid, mis leiavad

- permutatsioonide arvu;
- antud permutatsiooni järjekorranumbri;
- antud järjekorranumbrile vastava permutatsiooni.

3. Vaatleme  $n$ -elemendilise hulga  $n$ -permutatsioonide minimaalse muutuse järjekorda:

$n = 1$ :  $a$ ;

$n = 2$ :  $aB, Ba$ ;

$n = 3$ :  $abC, aCb, Cab, Cba, bCa, Cba$ ;

$n = k + 1$ :  $p_{11}p_{12} \dots p_{1k}N, p_{11}p_{12} \dots Np_{1k}, \dots, p_{11}p_{12}N \dots p_{1k}, p_{11}Np_{12} \dots p_{1k}, Np_{11}p_{12} \dots p_{1k},$   
 $Np_{21}p_{22} \dots p_{2k}, p_{21}Np_{22} \dots p_{2k}, p_{21}p_{22}N \dots p_{2k}, \dots, p_{21}p_{22} \dots Np_{2k}, p_{21}p_{22} \dots p_{2k}N,$   
 $p_{31}p_{32} \dots p_{3k}N, p_{31}p_{32} \dots Np_{3k}, \dots, p_{31}p_{32}N \dots p_{3k}, p_{31}Np_{32} \dots p_{3k}, Np_{31}p_{32} \dots p_{3k},$   
kus  $p_{11}p_{12} \dots p_{1k}, p_{21}p_{22} \dots p_{2k}, \dots$  on  $k$ -elemendilise hulga  $k$ -permutatsioonide minimaalse muutuse järjekord.

Kirjutada programm, mis leiab antud  $n$ -permutatsioonile järgneva.