

# “Convex hull trick”

Tähvend Uustalu

Eesti informaatikaolümpiaad

19. juuni 2019

## Ülesanne

On antud  $N$  funktsiooni  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ ; iga  $i$  korral  $f_i(x) = a_i x + b_i$ .

Antakse  $Q$  päringut:

- Antakse arv  $x$ . Leia  $\max_i f_i(x)$  ehk suurim arvude  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$  seast.

Vastata kõikidele päringutele.  $1 \leq N, Q \leq 10^5$ .

## Ülesanne

On antud  $N$  funktsiooni  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ ; iga  $i$  korral  $f_i(x) = a_i x + b_i$ .

Antakse  $Q$  päringut:

- Antakse arv  $x$ . Leia  $\max_i f_i(x)$  ehk suurim arvude  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$  seast.

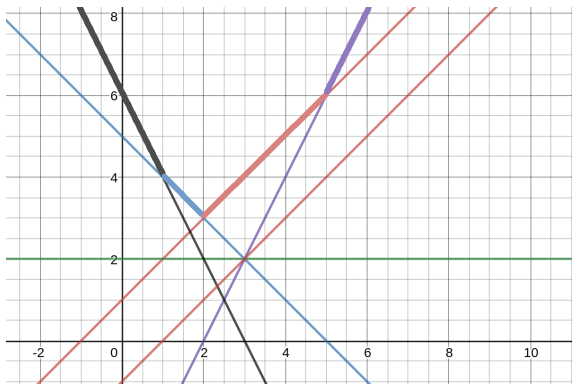
Vastata kõikidele päringutele.  $1 \leq N, Q \leq 10^5$ .

Näiteks:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x + 1; & f_2(x) = -x + 5; \\ f_3(x) = 2; & f_4(x) = 2x - 4; \\ f_5(x) = -2x + 6; & f_6(x) = x - 1. \end{array}$$

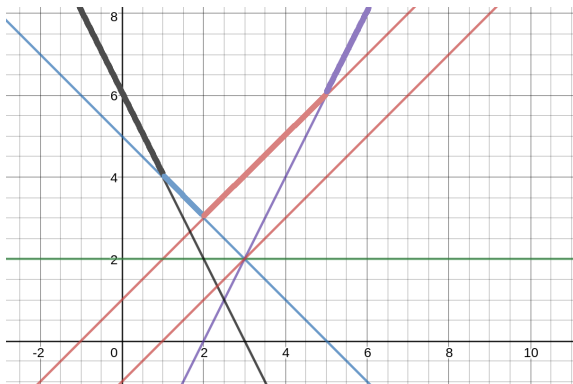
## Eesmärk

Iga funktsiooni kohta arvutada välja intervall, kus ta “domineerib”.



## Eesmärk

Iga funktsiooni kohta arvutada välja intervall, kus ta “domineerib”.



$[\langle -\infty, f_5 \rangle, \langle 1, f_2 \rangle, \langle 3, f_1 \rangle, \langle 5, f_4 \rangle]$ .

## Tähelepanek

Funktsioonid domineerivad tõusu järjekorras.

## Tähelepanek

Funktsioonid domineerivad tõusu järjekorras.

- sorteerime funktsioonid tõusu järgi kasvavalt;
- viskame välja “paralleelsed” funktsioonid;

## Tähelepanek

Funktsioonid domineerivad tõusu järjekorras.

- sorteerime funktsioonid tõusu järgi kasvavalt;
- viskame välja “paralleelsed” funktsioonid;
- konstrueerime iteratiivselt “domineerimismassiivi”.



Lõpuks on meil massiiv kujul

$$[\langle -\infty, f_1 \rangle, \langle c_1, f_2 \rangle, \langle c_2, f_3 \rangle, \dots, \langle c_{k-1}, f_k \rangle],$$

mis näitab, et nt.  $f_2(x)$  väärtus on suurim, kui  $c_1 \leq x \leq c_2$ .

### Päringutele vastamine

Kui tuleb päring, kus antakse arv  $x$ :

Lõpuks on meil massiiv kujul

$$[\langle -\infty, f_1 \rangle, \langle c_1, f_2 \rangle, \langle c_2, f_3 \rangle, \dots, \langle c_{k-1}, f_k \rangle],$$

mis näitab, et nt.  $f_2(x)$  väärtus on suurim, kui  $c_1 \leq x \leq c_2$ .

### Päringutele vastamine

Kui tuleb päring, kus antakse arv  $x$ :

- leiame kahendotsinguga, missuguse funktsiooni “domineerimispiirkonnas”  $x$  asub;
- arvutame selle funktsiooni väärtuse kohal  $x$ .

Keerukus  $\mathcal{O}(N + Q \log N)$ .

Võte on väga paindlik!

## Ülesanne

Tasandil on antud  $N$  pitsarestorani. Antakse  $Q$  päringut kujul:

- Antakse arv  $x$ . Leida punktile  $(x, 0)$  lähim pitsarestoran.

## Ülesanne

On antud  $N$  funktsiooni kujul  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x)$ ; iga  $i$  korral  $f_i(x) = a_i x + b_i$ .

Antakse  $Q$  päringut:

- Antakse arv  $x$ . Leia  $\max_i f_i(x)$ .
- Antakse arvud  $a$  ja  $b$ . Lisada funktsioonid sekka uus funktsioon  $ax + b$ .

Vastata kõikidele päringutele.  $1 \leq N, Q \leq 10^5$ .

## Ülesanne

On  $N$  puud, kõrgustega

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_N,$$

ning arvud

$$b_1 > b_2 > b_3 > \dots > b_N = 0.$$

Tahame maha võtta kõik puud. Meie mootorsaag:

- suudab maha võtta ühe meetri korruga ja vajab seejärel laadimist;
- laadimise hind on  $b_j$ , kus  $j$  on kõrgeima täielikult maha võetud puu indeks.

Mootorsaag on alguses laetud. Leia odavaim viis kõik puud maha võtta.  $1 \leq N \leq 10^5$ .

## Tähelepanek

Enne puu  $N$  maha võtmist peaks maha võetavate puude jada olema kasvav.

## Tähelepanek

Enne puu  $N$  maha võtmist peaks maha võetavate puude jada olema kasvav.

## Strateegia

- Valime (kuidagi?) indeksid  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k = N$ ;
- võtame need puud selles järjekorras maha;
- nüüd on puude maha võtmine tasuta: võtame ülejäänud maha!

Kuidas valida  $1 = i_1 < \dots < i_k = N$  võimalikult odavalt?

## Tähelepanek

Enne puu  $N$  maha võtmist peaks maha võetavate puude jada olema kasvav.

## Strateegia

- Valime (kuidagi?) indeksid  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_k = N$ ;
- võtame need puud selles järjekorras maha;
- nüüd on puude maha võtmine tasuta: võtame ülejäänud maha!

Kuidas valida  $1 = i_1 < \dots < i_k = N$  võimalikult odavalt?

## Definitsioon

$dp[t]$  olgu odavaim hind valimaks arvud  $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k = t$  ja võtmaks maha vastavad puud selles järjekorras.



## Definitsioon

$dp[t]$  olgu odavaim hind valimaks arvud  $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k = t$  ja võtmaks maha vastavad puud selles järjekorras.

$$dp[1] = 1;$$

$$dp[t] = \min_{1 \leq k < t} dp[k] + b_k a_t.$$

## Definitsioon

$dp[t]$  olgu odavaim hind valimaks arvud  $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k = t$  ja võtmaks maha vastavad puud selles järjekorras.

$$dp[1] = 1;$$

$$dp[t] = \min_{1 \leq k < t} dp[k] + b_k a_t.$$

## Tähelepanek

$dp[t]$  on lineaarfunktsioonide

$$b_1 x + dp[1], b_2 x + dp[2], \dots, b_{t-1} x + dp[t-1]$$

miinimum punktis  $x = a_t$ .