“Koduste” ülesannete lahendused

Tähvend Uustalu

Eesti informaatikolümpiaad

19. juuni 2019

A. Balls Game

Ülesanne

Reas on $N \leqslant 100$ värvilist kuulikest. Jahubil on ka üks kuulike. Kui ta asetab selle ritta:

- kui kuskil on järjest vähemalt kolm sama värvi kuulikest, siis need kuulid kaovad;
- see kordub nii kaua, kuni kuskil pole kolm sama värvi kuulikest.

Mis on suurim arv kuulikesi, mis saame ära kustutada?

N on väike — proovime lihtsalt kõiki võimalusi ja simuleerime jõumeetodil kuulide kadumist. Keerukus $\mathcal{O}(N^3)$.

K. Queue

Ülesanne

Järjekorras seisis $N \leqslant 2 \cdot 10^5$ õpilast. Iga õpilase kohta on teada selle õpilase number, kes tema ees seisis, ja selle õpilase number, kes tema taga seisis (õpilase enda number ei ole teada). Rekonstrueerida õpilaste järjekord.

Iga õpilase numbri kohta saame teada sellele numbrile üle-eelmise ja ülejärgmise numbri. Nii saame kaks numbrite jada. Need vaheliti pannes saame algse järjekorra.

J. Practice

Ülesanne

Jalgpallivõistkonnas on $N \leqslant 1000$ mängijat. Treener tahab teha mõned mängud nii, et:

- iga kahe mängija korral leidub mingi mäng, mil need kaks mängijat olid erinevates meeskondades;
- mänge on võimalikult vähe.

Leia minimaalne mängude arv ja konstruktsioon, mis selle saavutab.

Tähelepanek

Loendamisargument näitab, et vaja on vähemalt $\log_2 N$ mängu.

Nummerdame mängijad $0, \ldots, N-1$. Paneme meeskondadesse:

- esimesel mängul esimese kahendkoha järgi;
- teisel mängul teise kahendkoha järgi;
- jne.

G. Fix a Tree

Ülesanne

On antud graaf suunatud servadega $1 \to p_1, 2 \to p_2, \ldots, N \to p_N$, kus $N \leqslant 2 \cdot 10^5$. Tõsta võimalikult vähestest tippudest väljuvad servad ümber nii, et saadud graaf oleks puu.

Iga sidususkomponent on tsükkel, millest hargnevad välja "suunatud puud".

- Valime mingi sidususkomponendi juureks;
- "lõhume" ülejäänud sidususkomponentide tsüklid, suunates sealt servad "juurkomponenti";
- vajaduse korral lühendame "juurkomponendi" tsükli pikkusele 1.

Kui mingi komponendi tsükli pikkus on 1, siis tuleb see valida juurkomponendiks.

D. Edit Program

Ülesanne

Meil on tekstiredaktor, mis oskab teha järgmisi operatsioone:

- ".": liigutab kursori ühe võrra paremale;
- "x": kustutab kursorialuse sümboli;
- "0": sisestab kursorist vasakule "0";
- "1": sisestab kursorist vasakule "1";
- "^": vahetab kursorialuse sümboli ($0 \to 1$; $1 \to 0$);

On antud bitisõne s, t; $|s| = |t| = N$. Leia viis teisendada s selle redaktori abil sõneks t vähem, kui N sammuga. $N \leqslant 10^6$.

D. Edit Program

- Kui s ja t ei ole teineteise vastandid, võime ˆ-käskudega teha vähem, kui N vahetust;
- kui s jaotub vähemalt kolmeks samade sümbolite blokiks:

$$s = 0000\,111\,0;$$
$$t = 1111\,000\,1,$$

  siis kustutame s esimese sümboli, teeme ülimalt $N - 3$ ˆ-vahetust ja lisame sõne lõppu õige arvu;
- saab näidata, et kui ei jaotu vähemalt kolmeks blokiks, siis lahendust pole.

C. Circular Search

Ülesanne

Antud ruut nurkadega $(0, 0)$ ja (N, N), kus $N \leqslant 10^4$, kus asub salajane punkt.
Me võime teha päringuid kujul (x, y, r), kus $-10^9 \leqslant x, y \leqslant 10^9$ ja $0 \leqslant r \leqslant 10^9$.
Vastatakse, kas salajane punkt asub ringis keskpunktiga (x, y) ja raadiusega r.
Teha tohib kuni 50 päringut. Leida salajase punkti asukoht.

Kui ringjoont hästi lähedalt vaadata, siis see on põhimõtteliselt sirge. Saame seega küsida päringuid:

- kas salajase punkti x-koordinaat on vähemalt X?
- kas salajase punkti y-koordinaat on vähemalt Y?

See võimaldab salajase punkti leida kahendotsinguga.

B. Characteristics of Rectangles

Ülesanne

On antud $N \times M$ maatriks, kus $N, M \leqslant 1000$. Lõika ära mõned read ja veerud maatriksi servast nii, et nurkade miinimum oleks maksimaalne.

- Koostame nimekirja kõikidest maatriksi elementidest ja nende koordinaatidest, sorteerime selle kahanevalt.
- Vaatleme elementi x koordinaatidega (r, c):
  - Käime läbi kõik juba külastatud ruudud antud veerus (r', c):
    - kui leidub veerg c', mis "ühendab" ridu r ja r' ehk on külastatud ruudud (r, c') ja (r', c'), siis väljastame vastusena x;
    - vastasel juhul märgime ära, et veerg c ühendab ridu r ja r'.

Keerukus: $\mathcal{O}(N^2 \log N)$ (!!!)

I. Magical GCD

Ülesanne

On antud massiiv A pikkusega N, kus $N \leqslant 10^5$. Leia selle *maagiline SÜT*, s.t. maksimaalne võimalik

$$(r - l + 1) \gcd_{l \leqslant i \leqslant r} A[i].$$

Olgu $m \approx \frac{N}{2}$. m-es element kas on maksimumi saavutavas alammassiivis või ei ole.

- Arvutame maksimaalse maagilise SÜT, mis sisaldab m-ndat elementi:
  - Arvutame $\gcd(A[m]), \gcd(A[m], A[m+1]), \gcd(A[m], A[m+1], A[m+2]), \ldots$.
  - Nende seas on ülimalt $\log N$ erinevat arvu.
  - Arvutame analoogilised SÜT-id vasakpoolses suunas.
  - Kokku saame $\log^2 N$ võimalikku kandidaati.

I. Magical GCD

Olgu $m \approx \frac{N}{2}$. m-es element kas on maksimumi saavutavas alammassiivis või ei ole.

- Arvutame maksimaalse maagilise SÜT, mis sisaldab m-ndat elementi:
  - Arvutame $\gcd(A[m]), \gcd(A[m], A[m+1]), \gcd(A[m], A[m+1], A[m+2]), \ldots$.
  - Nende seas on ülimalt $\log N$ erinevat arvu.
  - Arvutame analoogilised SÜT-id vasakpoolses suunas.
  - Kokku saame $\log^2 N$ võimalikku kandidaati.
- Eeldades, et maksimaalne maagiline SÜT ei sisalda m-ndat elementi, rekurseerime alammassiividele $A[1], \ldots, A[m-1]$ ja $A[m+1], \ldots, A[N]$.

Keerukus $\mathcal{O}(N \log^3 N)$.

L. Rhombographs

Ülesanne

Rombograaf on graaf, kus iga kahe tipu $A \neq B$ korral kehtib üks järgnevatest:

- leidub serv $A - B$;
- ei leidu serva $A - B$, aga leidub täpselt kaks tippu C, D nii, et leiduvad servad $A - C$, $A - D$, $B - C$, $B - D$.

Antakse arvud N, M, X. Leida rombograaf, kus tippude arv vahemikus $N \ldots M$ ja iga tipu aste X.

- $5\sqrt{M} \leqslant \left\lfloor \frac{7}{3} \cdot X \right\rfloor + 6$;
- $X - 1 \leqslant M - N$.
- $1 < X \leqslant 121$.

Üks võimalus rombograaf konstrueerida:

- teeme tabeli $R \times C$;
- teeme graafi, mille iga tipp on üks tabeli ruut;
- tõmbame tippude vahele serva, kui nad on ühes reas või veerus.

On lihtne veenduda, et see on rombograaf.
On võimalik veenduda, et alati leidub üks niisugune ülesande tingimustele vastav rombograaf.

E. Fairy

Ülesanne

On antud graaf N tipu ja M servaga, kus $N, M \leqslant 10^4$. Leia kõik servad, mille eemaldamise järel oleks graaf kahealuseline.

Kui:

- ...mitu sidususkomponenti ei ole kahealuselised, siis lahendit pole;
- ...kõik sidususkomponendid on kahealuselised, siis võime eemaldada suvalise sidususkomponendi.

Seega piisab vaadata üht sidususkomponenti, eeldame, et see ei ole kahealuseline.

E. Fairy

Lemma

Sügavuti läbimise abil saab suvalise graafi viia kujule, kus:

- mingid servad (*toeservad*) moodustavad juurega puu;
- ülejäänud servad (*lisaservad*) ühendavad eellast järglasega.

Viime graafi sellisele kujule. Värvime tipud ainult toeservi arvestades kahe värviga. Nimetame lisaserva *vastuoluliseks*, kui tema otspunktid on sama värvi.

Tuvastame kõik lisaservad, mille eemaldamine muudaks graafi kahealuseliseks.

- Kui leidub üks vastuoluline lisaserv, siis selle eemaldamine muudab graafi kahealuseliseks.
- Kui leidub mitu vastuolulist lisaserva, siis ühegi eemaldamine ei muuda graafi kahealuseliseks.

Toeserva eemaldamine muudab kahealuseliseks, kui temaga paralleelsete lisaservade hulk on vastuoluliste servade hulk.

F. Fast Travel Coloring

Ülesanne

On antud $7N \leqslant 1000$ tipuga täielik graaf. Värvi selle servad N värviga nii, et lühim tee iga kahe tipu vahel mööda iga värvi on pikkusega ülimalt 2.

Jaotame tipud 7-elemendilistesse blokkidesse, iga värvi jaoks üks blokk ("südamik").

- Südamikusisesed servad värvime kõik vastava värviga.
- Eesmärk on, et iga kahe tipu u ja v vahel leidub vastavat värvi teekond kujul: tipp $u \rightarrow$ antud värvi südamiku tipp $\rightarrow$ tipp v.

F. Fast Travel Coloring

Olgu:

- c_i värvi c südamiku i-s tipp;
- d_j värvi d südamiku j-s tipp,

kusjuures $c < d$. Värvime nendevahelise serva värviga c parajasti siis, kui $M_{ij} = 1$. Siin M on teatud heade omadustega maatriks.

Lemma

Leidub 7×7 kahendmaatriks, kusjuures:

- igal kahel real leidub vähemalt üks ühine 1;
- igal kahel real leidub vähemalt üks ühine 0;
- igal kahel real leidub positsioon, mis esimesel on 1 ja teisel 0.
- igal kahel real leidub positsioon, mis esimesel on 0 ja teisel 1.

Tõestus: randomiseeritud otsing leiab kiiresti sellise.

H. Halve & Merge

Ülesanne

On antud massiiv A pikkusega N, mis algselt sisaldab arvude $1 \ldots N$ permutatsiooni. Antakse Q päringut:

- Antakse arv p. Leia $A[p]$.
- Antakse arv p. Asenda massiiv A massiiviga $\text{merge}(A[1 \ldots p], A[p+1 \ldots N])$.