

Mathematischer Vorkurs
im Frühjahr 2005 an der Universität Mainz
Abschlusstest am 21. April 2005

Name, Vorname:

Studienziel (Physik, Chemie, ...):

Studiengang (Diplom, Lehramt, ...):

Übungsgruppe oder Gruppenleiter/in:

Ergebnis, nur von der Tutorin bzw. dem Tutor auszufüllen:

- | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|-----|--|-----|--|-----|---|-----|--|-----|---|
| 1. | <input type="checkbox"/> | 2. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 3. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 4. | <input type="checkbox"/> | 5. | <input type="checkbox"/> | 6. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 7. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 8. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 9. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 10. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 11. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 12. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> |
| 13. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 14. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 15. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 16. | <input type="checkbox"/> | 17. | <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> | 18. | <input type="checkbox"/> |

Abschlusstest

1. Lösen Sie die Gleichung $2x^2 - x = 6$:

2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Funktionen in der Form $z = \alpha + i\beta$ und bestimmen Sie α und β :

(a) $(1 + 2i)(3 - i) =$

(b) $\frac{1}{1 + i} =$

3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Funktionen in der Form $z = re^{i\phi}$ und bestimmen Sie r und ϕ :

(a) $(1 + 2i)(3 - i) =$

(b) $\frac{1}{1 + i} =$

4. Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & a \\ 2 & a \end{vmatrix} =$$

5. Skizzieren Sie $\cos(2\alpha)$:

6. Wie lauten die Additionstheoreme?

(a) $\sin(\alpha + \beta) =$

(b) $\cos(\alpha + \beta) =$

7. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $e^3 e^{-2} =$

(b) $\ln 1 - \ln e =$

(c) $e^{-\ln 137} =$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$

8. Bestimmen Sie (a) Minima und Maxima der Funktion $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$.
(b) Wieviele Nullstellen gibt es? (Hinweis: Skizze!)

9. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

(b) $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^3}$

10. Geben Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ für folgende Funktionen an:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

(b) $f(x) = e^{ax}, \quad a = \text{konstant}$

11. Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^\pi \sin x \, dx =$

(b) $\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} \, dx =$

(c) $\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-ax^2} \, dx =$

Hinweis: $\int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

12. Berechnen Sie mit den Ergebnissen der vorstehenden Aufgabe den Mittelwert und die mittlere quadratische Abweichung der Verteilungsfunktion e^{-ax^2} :

(a) $\langle x \rangle = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty x e^{-ax^2} \, dx =$

(b) $(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle =$

13. Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = (1, 1, 1)$ und $\vec{b} = (1, -1, 1)$. Bestimmen Sie

(a) die Länge von \vec{a} :

(b) das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

(c) einen Vektor der Länge 1, welcher auf \vec{a} und \vec{b} senkrecht steht:

(d) die Komponenten von \vec{a} parallel und senkrecht zu \vec{b} :

$$\vec{a}_{\parallel} =$$

$$\vec{a}_{\perp} =$$

14. Es sei $z = \sqrt{3} - i$. Bestimmen Sie die folgenden Größen:

(a) $\operatorname{Re}(z) =$

(b) $\operatorname{Im}(z) =$

(c) $|z| =$

15. Wie lauten die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylorentwicklung um den Punkt $x_0 = 0$?

(a) $e^x =$

(b) $\sin x =$

(c) $\cos x =$

16. Integrieren Sie mittels partieller Integration

$$\int_1^t \frac{\ln x}{x} dx =$$

17. Welche Funktionen verbergen sich hinter den Reihen?

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} =$

18. Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (-1, 1, 2)$ aufgespannt wird.