Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 2 – Dienstag, 12. April 2005

2.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Es seien $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = -i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2 sowie die Beträge dieser komplexen Zahlen und zeichnen Sie diese in die komplexe Zahlenebene ein.

2.2 Real- und Imaginärteil

Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahlen

(a) $\frac{1}{i}$, (b) $(3+2i)(3+4i)$, (c) $(2+i)(1+2i)$, (d) $\frac{1+i}{1-i}$.

2.3 Konjugiert komplexe Zahl

Die zu $z = a + ib$ konjugiert komplexe Zahl ist $z^* = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $zz^* = |z|^2 = |z^*|^2$, $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ und $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$ ist.

2.4 Lösung von Gleichungen im Komplexen

Geben Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen an:

(a) $z^4 - 1 = 0$, (b) $zz^* = 1$, (c) $z^2 + z^{*2} = 2$.

2.5 Lösung einer quadratischen Gleichung

Lösen Sie die quadratische Gleichung $z^2 - 6z + 13 = 0$, indem Sie

(a) diese in ihren Real- und Imaginärteil zerlegen und die entstandenen Gleichungen lösen,

(b) die Gleichung mit der *pq*-Formel lösen, für die Diskriminante aber $\sqrt{-D} = i\sqrt{D}$ nutzen.

2.6 Gaußsche Zahlenebene

Auf welcher Kurve in der Gaußschen Zahlenebene liegen jeweils die Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die

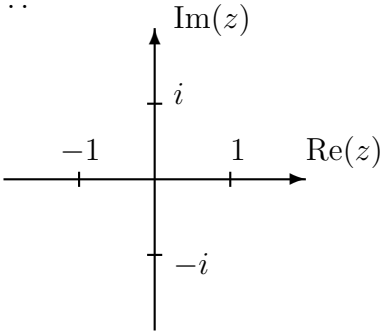
(a) $|z| = 1$ (b) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$ (c) $\mathrm{Re}(z) = 1$ gilt?

Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ an, die in der Gaußschen Zahlenebene ...

(d) ... außerhalb des Einheitskreises liegen,

(e) ... in der rechten Halbenebene liegen,

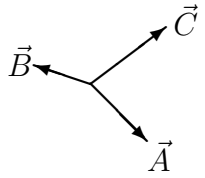
(f) ... auf der negativ-imaginären Achse liegen.



2.7 Vektoraddition und -subtraktion

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$, die in einer Ebene liegen. Bestimmen Sie graphisch die folgenden Vektoren:

$$\vec{A}+\vec{B}, \qquad \vec{A}-\vec{B}, \qquad 2\vec{A}, \qquad \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}, \qquad \vec{A}-\vec{B}+\vec{C}.$$



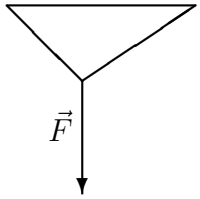
2.8 Assoziativgesetz

Zeigen Sie graphisch, dass für die Addition von Vektoren das Assoziativgesetz gilt, d.h.

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}.$$

2.9 Kräfteparallelogramm

Ein Körper werde an zwei ungleich langen Fäden aufgehängt. Welcher der Fäden wird durch das Gewicht des Körpers (die Kraft $\vec{F}$) stärker belastet? Ermitteln Sie das Ergebnis graphisch!



2.10 Stabilisierung durch Diagonale

$\vec{A}$ und $\vec{B}$ seien zwei Vektoren mit der Eigenschaft, dass $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ ist. Zeigen Sie allgemein, dass dann $\vec{A}$ und $\vec{B}$ senkrecht stehen und begründen Sie dies mit einer Skizze.

2.11 Dreieck aus Vektoren

Wann bilden drei Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ die Seiten eines Dreiecks?

2.12 Viereck aus Vektoren

Wann bilden vier Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ und $\vec{D}$ die Seiten eines ebenen Vierecks? Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.