Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

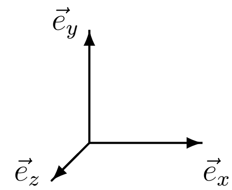
Aufgabenblatt Nr. 3 – Mittwoch, 13. April 2005

Verwenden Sie nach Möglichkeit die Winkelfunktionen nur dann, wenn ein Winkel gefragt ist!

3.1 Einheitsvektoren

Skizzieren Sie im nebenstehenden „räumlichen“ Bild die Vektoren

$$\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z, \qquad \vec{B} = \vec{e}_x + \vec{e}_z, \qquad \vec{C} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z,$$



wobei $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ die Einheitsvektoren entlang der positiven kartesischen Achsenrichtungen sind. Zeigen Sie, dass die Gleichung $a\vec{A} + b\vec{B} + c\vec{C} = \vec{0}$ für a, b und c nur die Lösung $a = b = c = 0$ besitzt. Als was gelten die drei Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ dann?

3.2 Skalarprodukte und Winkel

Gegeben seien die Vektoren $\vec{A} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ und $\vec{B} = -\vec{e}_x + \vec{e}_y$. Berechnen Sie für diese Vektoren die Skalarprodukte $\vec{A} \cdot \vec{A}$, $\vec{B} \cdot \vec{B}$ und $\vec{A} \cdot \vec{B}$ sowie den Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{B}$.

3.3 Projektion auf eine Achse

Geben Sie eine allgemeine Vorschrift an, wie ein Vektor $\vec{A}$ in eine zu einem Vektor $\vec{E}$ parallele Komponente $\vec{A}_\parallel$ und eine dazu senkrechte Komponente $\vec{A}_\perp$ zerlegt werden kann. Wenden Sie diese Vorschrift anschließend auf den Fall $\vec{A} = 2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$ und $\vec{E} = -\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$ an.

3.4 Vektorprodukt

Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{A} \times \vec{B}$ für die Vektoren

(a) $\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y,\ \vec{B} = \vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z,$ (b) $\vec{A} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_z,\ \vec{B} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_z.$

3.5 Doppeltes Vektorprodukt

Zeigen Sie anschaulich, dass der Vektor $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ in der von B und C aufgespannten Ebene liegt, d.h. dass $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \alpha\vec{B} + \beta\vec{C}$ mit reellen Koeffizienten α und β gilt. Zeigen Sie anschließend, dass $\beta\vec{A} \cdot \vec{C} = -\alpha\vec{A} \cdot \vec{B}$ ist. Versuchen Sie schließlich zu zeigen, dass $\alpha = \vec{A} \cdot \vec{C}$ und $\beta = -\vec{A} \cdot \vec{B}$ gilt, womit Sie dann die „BAC-CAB“-Regel hergeleitet hätten, also

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

3.6 Jacobi-Identität

Zeigen Sie, dass für das zweifache Vektorprodukt zwischen drei Vektoren kein assoziatives Gesetz gilt, d.h. dass i.a. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ ist. Beweisen Sie aber die Jacobi-Identität

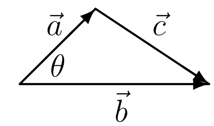
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0.$$

3.7 Eine interessante Summe

Berechnen Sie $(\vec{A} \times \vec{B})^2 + (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ und wundern Sie sich über das Ergebnis!

3.8 Maße am Dreieck

Berechnen Sie die Länge der Dreiecksseite c mit Hilfe der Vektoren $\vec{a} = (4, 4, 0)$ und $\vec{b} = (10, 0, 0)$. Wie groß ist der Winkel θ?



3.9 Ebenengleichung

Stellen Sie die Ebene E, die senkrecht zu einem Vektor $\vec{s}$ steht und den Punkt P_0 mit Ortsvektor $\vec{r}_0$ enthält, durch eine Vektorgleichung dar.

3.10 Flächenberechnung

Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (-1, 1, 2)$ aufgespannt wird. Konstruieren Sie für die Ebene, in der das Parallelogramm liegt und die den Punkt $P(1, 1, 0)$ enthält, den Ebenennormalenvektor und stellen Sie eine Vektorgleichung für diese Ebene auf.

3.11 Abstand von einer Geraden

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(4, -1, 5)$ von der Geraden, die durch die beiden Punkte $P_1(-1, 2, 0)$ und $P_2(1, 1, 4)$ festgelegt ist.

3.12 Beziehungen zwischen Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{r}_1 = (2, 4, 0)$ und $\vec{r}_2 = (1, 2, 2)$. Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_+$ und $\vec{e}_-$ in Richtung der Vektoren $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ bzw. $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$.