Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 5 – Freitag, 15. April 2005

5.1 Zahlenfolgen

Raten Sie die Darstellung der folgenden Zahlenfolgen durch die fortlaufende natürliche Zahl n:

(a) 0, 3, 8, 15, 24, ...

(b) 0.5, 0.125, 0.03125, 0.0078125, ...

(c) 0, $-1/2$, $2/3$, $-3/4$, $4/5$, ...

5.2 Jährlich anwachsende Population

Durch welche Zahlenfolge wird eine jährlich um einen Faktor 2 ansteigende Population beschrieben, ausgehend von einer Population von 100 Individuen im Jahre 2001?

5.3 Drei Grenzwerte im Endlichen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (Tipps: Polynomdivision, Beschränktheit, Untergrenzwert)

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}\qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+e^{-1/x}}.$$

5.4 Drei Grenzwerte im Unendlichen

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte durch geeignetes Kürzen, Erweitern oder Zusammenfassen:

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}\right)^4\qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+2)}{n+1}-\frac{n^3}{n^2+1}\right)\qquad \text{(c)}\quad \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

5.5 Quadratische Reihe

In der Vorlesung haben wir die Reihe $\sum_{k=1}^n k$ kennengelernt, für die Carl Friedrich Gauß bereits als Schüler eine geschlossene Form fand. Wie sieht das aber aus für

$$\sum_{k=1}^n k^2,$$

können Sie auch für diese Reihe eine geschlossene Formel finden? Probieren Sie dazu zunächst einmal für $n=1,2,3$ und

1. entscheiden Sie, ob das Ergebnis linear, quadratisch oder eher kubisch mit n geht.
2. Stellen Sie einen entsprechenden Ansatz in Potenzen von n auf.
3. Passen Sie die Koeffizienten des Ansatzes an die ersten Ergebnisse an.
4. Beweisen Sie die erhaltene Formel schließlich mittels vollständiger Induktion.

5.6 Bernoullische Ungleichung

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die *Bernoullische Ungleichung* ($n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$)

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

5.7 Geometrische Reihe

Wie lässt sich die Beschränkung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$$

durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe beweisen?