

Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 6 – Montag, 18. April 2005

6.1 Quadratische Funktion

Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = x^2 - x - 2$ im Intervall $-2 \leq x \leq 2$. Wie lässt sich diese Funktion so schreiben, dass die folgenden Charakteristika deutlicher zu erkennen sind:

- (a) Nullstellen (b) Scheitelpunkt

6.2 Nullstellen und Polstellen

Skizzieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x - a}{x - b}$$

für positive Werte von a und b und $x \neq b$. Unterscheiden Sie die Fälle $a < b$, $a = b$ und $a > b$.

6.3 Gebrochen rationale Funktion

Vereinfachen Sie die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 2x - 3},$$

indem Sie Nullstellen für Zähler und Nenner suchen und stetig ergänzen.

6.4 Quadratische Ungleichung

Für welche Werte von x ist die Ungleichung $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$ erfüllt?

6.5 Partialbruchzerlegung

Bilden Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x + 2}{2x^2 - x - 15}.$$

6.6 Grad und Bogenmaß

Rechnen Sie den Winkel 120° in Bogenmaß um. Geben Sie umgekehrt den Winkel in Grad an, der eine Bogenlänge $\pi/9$ auf dem Einheitskreis beschreibt.

6.7 Periodizität

Skizzieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sin^2 x.$$

Sind diese Funktionen periodisch?

6.8 Superposition und Kreisfrequenz

Zeigen Sie, dass die Superposition zweier Schwingungen derselben Frequenz, aber verschiedener Amplitude, $a_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(\omega t)$, stets in der Form $A \sin(\omega t + \varphi)$ geschrieben werden kann. Wie hängt die Periode T der Funktion $\sin(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz ω zusammen?

6.9 Ein weiteres Additionstheorem

Verifizieren Sie das Additionstheorem für die Tangensfunktion,

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

6.10 Logarithmus

Berechnen Sie die natürlichen Logarithmen der Ausdrücke

$$(a) \quad a^{-2}(1+b)^3 \qquad (b) \quad \frac{2^{x+1}e^2\sqrt{\cos x}}{(1+x)^{3/2}}.$$

6.11 Verkettung von Funktionen

Geben Sie zu den Funktionen

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right), \quad x \neq \pm 1$$

die zusammengesetzte Funktion $g(f(x))$ an und vereinfachen Sie den entstehenden Ausdruck. Wie lautet der Definitionsbereich von $g(f(x))$?

6.12 Umkehrfunktion

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 5 + \sqrt{9-x}$ für $0 \leq x \leq 9$. Zeigen Sie, dass $f(x_1) > f(x_2)$ für $x_1 < x_2$ (d.h. $f(x)$ ist *streng monoton fallend*) und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.