

Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 7 – Dienstag, 19. April 2005

7.1 Eulersche Formel

Lösen Sie die Eulersche Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ und ihr komplex Konjugiertes nach Cosinus und Sinus auf und beweisen Sie die Beziehungen (a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ sowie

- (b) $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, (c) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
(d) $\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, (e) $\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$.

7.2 Betrag und Phase

Bestimmen Sie Betrag und Phase der komplexen Zahlen

- (a) $1 + i$, (b) $\frac{1+i}{1-i}$, (c) $\sqrt{2} + i\sqrt{6}$, (d) $(-1 + i\sqrt{3})^{3/2}$.

7.3 Quadrat und Wurzel im Komplexen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^2$. Wenn Sie $z = |z|e^{i\varphi}$ setzen und die Phase φ von 0 bis 2π laufen lassen, so durchläuft z einen vollständigen Kreis in der Gaußschen Zahlenebene.

- (a) Wie wandert dabei der Bildpunkt $f(z)$?
(b) Führen Sie dieselben Überlegungen für die Funktion $f(z) = \sqrt{z}$ durch.

7.4 Stetigkeit

Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen definiert und stetig?

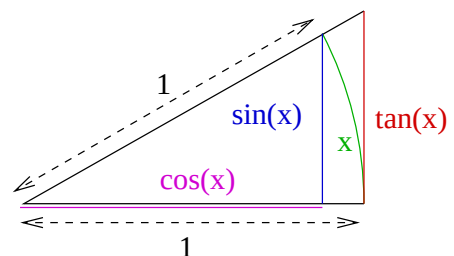
- (a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$, (b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, (c) $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Setzen Sie die Funktionen gegebenenfalls stetig fort.

7.5 Ungleichungen für trigonometrische Funktionen

Beweisen Sie anhand der nebenstehenden Abbildung die Ungleichungen

- (a) $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$
(b) $0 \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$



für $x \leq \pi/2$, indem Sie passende Strecken und Bogenstücke, Dreiecksflächen und Kreissegmente betrachten. Was ergibt sich dann für kleine Werte von x im Falle von $\sin x$ und $\cos x$?

7.6 Bahnkurven in der Ebene

Zeichnen Sie die in der xy -Ebene liegenden Bahnkurven

- (a) $t\vec{e}_x + (1-t)\vec{e}_y$ für $0 \leq t \leq 1$,
- (b) $\cos t\vec{e}_x + \sin t\vec{e}_y$ für $0 \leq t \leq \pi$.

Welche Form von Bewegung liegt in den beiden Fällen vor, fasst man t als Zeit auf? Versuchen Sie eine Geschwindigkeit für jeden Punkt der Bahnkurve in beiden Fällen zu konstruieren.

- (c) Wie liegt der Geschwindigkeitsvektor relativ zur Bahnkurve?
- (d) Wie muss man den Grenzübergang zur Momentangeschwindigkeit im zweiten Fall vollziehen und wie sieht der Geschwindigkeitsvektor nach geometrischen Überlegungen aus?

7.7 Gleichförmige Bewegung

Die Bahn eines Teilchens, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, lässt sich beschreiben als $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. Was ist die Bedeutung von $\vec{r}_0$? Für welchen Zeitpunkt hat das Teilchen den geringsten Abstand

- (a) vom Bezugspunkt $\vec{r}_0$?
- (b) vom Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}_1$?

Schreiben Sie dies allgemein, aber auch für das Beispiel $\vec{r}_0 = (0, 1, 0)$, $\vec{r}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$.