

Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 8 – Mittwoch, 20. April 2005

8.1 Eine erste Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass $y = \sin x$ und $y = \cos x$ die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ erfüllen.

8.2 Grenzwert des Differenzenquotienten

Bestimmen Sie aus dem Grenzwert des Differenzenquotienten die Ableitungen von

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{x} \text{ an der Stelle } x_0 \neq 0, \quad (b) \quad f(x) = x \sin x \text{ an der Stelle } x_0 = 0.$$

8.3 Tangente und Normale

Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ die Steigung bei $x_0 = 2$ sowie die Gleichungen von Tangente und Normale in diesem Punkt.

8.4 Nirgendwo waagerecht

Welche Beziehung muss zwischen den Koeffizienten von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bestehen, damit der Graph der Funktion keine waagerechte Tangente hat? (Tipp: quadratische Gleichung)

8.5 Ableitungen rationaler Funktionen und Wurzelfunktionen

Bilden Sie die Ableitungen der Funktionen

$$(a) \quad f(x) = (a + bx)^n, \quad (b) \quad k(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad (c) \quad \rho(\varepsilon) = \sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon}} \text{ (mit } \varepsilon \geq 0).$$

8.6 Schnittwinkel

Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven der Funktionen

$$(a) \quad f_1(x) = x^3 \quad \text{und} \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x, \quad (b) \quad f_1(x) = x^3 + x^2 \quad \text{und} \quad f_2(x) = 2x?$$

8.7 Ableitungen trigonometrischer Funktionen

Differenzieren Sie

$$(a) \quad x \sin x, \quad (b) \quad x^2 \sin x, \quad (c) \quad \sin^2 x, \quad (d) \quad \sin(2x).$$

8.8 Höhere Ableitungen

Berechnen Sie den Wert der n -ten Ableitung nach x für

$$(a) \quad x^m, \quad (b) \quad e^{ax}, \quad (c) \quad \sin x, \quad (d) \quad \cosh x.$$

8.9 Ableitung der Umkehrfunktion

- (a) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ aus der Ableitung von $g(x) = x^2$.
- (b) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \arcsin x$ aus der Ableitung von $g(x) = \sin x$.
- (c) Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln x$ aus der Ableitung von $g(x) = e^x$.

8.10 Zwei kompliziertere Ableitungen

Differenzieren Sie

$$(a) f(x) = x^x \qquad (b) g(x) = \log_a(h(x))$$

8.11 Taylorreihen

Bestimmen Sie die ersten drei Glieder der Taylorentwicklung um $x_0 = 0$ für die Funktionen

$$(a) e^x, \quad (b) \sin x, \quad (c) \cos x, \quad (d) \ln(1 - x)$$

und zeigen Sie mit ihrer Hilfe die Gültigkeit der Eulerschen Beziehung $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

8.12 Kurvendiskussion

Bestimmen Sie Nullstellen, Art und Lage der Extrema und skizzieren Sie die Funktionen

$$(a) f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x, \quad (b) f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad (c) f(x) = xe^{-x^2}$$

8.13 Extremwertaufgabe

Welches Rechteck hat bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt, welches den kleinsten?
Welches rechtwinklige Dreieck hat bei gegebenem Umfang den größten Flächeninhalt?

8.14 Regel von l'Hospital

Bestimmen Sie die Grenzwerte mittels der l'Hospital'schen Regel,

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$$