Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 9 – Donnerstag, 21. April 2005

9.1 Flugzeug

Ein Flugzeug beschleunigt vom Start aus zehn Minuten lang mit der Beschleunigung

$$a(t) = 0.5\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}^2} + 0.1\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}^3}t.$$

Wie groß ist seine Endgeschwindigkeit und wie weit ist es nach sechs Stunden geflogen?

9.2 Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die Integrale durch „Probieren“ und Test mittels Ableitung

$$\text{(a)}\ \int_{-1}^{1} x^3 dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 e^a da, \qquad \text{(c)}\ \int_1^e \frac{dt}{t}, \qquad \text{(d)}\ \int_0^1 \cos(\pi y) dy.$$

9.3 Geometrische Deutung

Berechnen Sie die folgenden Integrale und deuten Sie das Ergebnis geometrisch ($a > 0$):

$$\text{(a)}\ \int_{-a}^{a} x^2 dx, \qquad \text{(b)}\ \int_0^a x^2 dx, \qquad \text{(c)}\ \int_{-a}^{a} x\, dx, \qquad \text{(d)}\ \int_0^a x\, dx.$$

9.4 Partialbruchzerlegung

Integrieren Sie unbestimmt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\text{(a)}\ \frac{1}{x^2-1}, \quad x \neq \pm 1, \qquad \text{(b)}\ \frac{1}{x^3-x}, \quad x \neq 0, \pm 1.$$

9.5 Partielle Integration

Bestimmen Sie durch partielle Integration die Stammfunktionen (unbestimmten Integrale)

$$\text{(a)}\ \int \ln x\, dx, \quad x > 0, \qquad \text{(b)}\ \int x\, e^{-x} dx, \qquad \text{(c)}\ \int \cos^2 x\, dx.$$

9.6 Substitution

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitutionen die unbestimmten Integrale

$$\text{(a)}\ \int \frac{\ln^2 x}{x} dx \qquad (x = e^w) \qquad \text{(b)}\ \int \sqrt{1-x^2} dx \qquad (x = \sin\varphi).$$

9.7 Ableitung nach der unteren Grenze

Geben Sie die Ableitung der Funktion $\psi(x) = \int_x^b f(x')dx'$ nach der unteren Grenze an.

9.8 Ellipsenfläche

Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. Die Ellipsengleichung lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

9.9 Differenzierbare Fortsetzung

Die Funktion $f(x)$ sei definiert als

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{für } -5 \leq x \leq -2 \\ ax^2 + bx + c & \text{für } -2 < x < +2 \\ -x+5 & \text{für } +2 \leq x \leq +5. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c so, dass $f(x)$ im Intervall $-5 \leq x \leq 5$ differenzierbar ist und berechnen Sie die von dem Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche.

9.10 Ein uneigentliches Integral

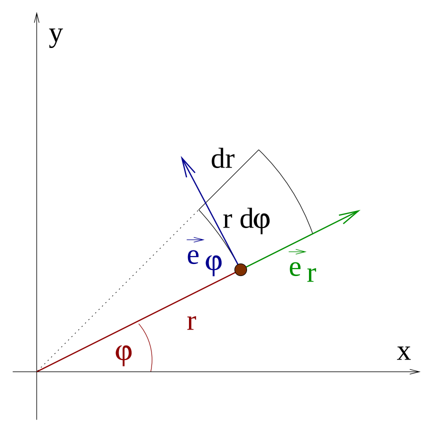
Überführen sie durch eine geeignete Substitution den Integranden im Integral $\int_0^\infty \ln x/(1+x^2)dx$ in sich selbst und zeigen Sie damit, dass dieses Integral verschwindet.

9.11 Gaußsche Glockenkurve und Parameterableitung

In der Vorlesung sind wir nicht auf Polarkoordinaten eingegangen. Wie bei den komplexen Zahlen sind diese gegeben durch den Radius r und den Winkel φ gegen die x-Achse. Wie die nebenstehende Abbildung darlegt, ist das Flächenelement anstelle von $dx\,dy$ gegeben durch $r\,dr\,d\varphi$. Benutzen Sie diese Polarkoordinaten, um das (uneigentliche) Integral über die Gaußsche Glockenkurve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

zu bestimmen. Gehen Sie dabei wie folgt vor:



1. Quadrieren Sie das Integral und schreiben Sie es als ein Zweifachintegral über x und y.
2. Wechseln Sie zu Polarkoordinaten und nutzen Sie $x^2 + y^2 = r^2$ im Exponenten.
3. Integrieren Sie den Winkel von 0 bis 2π, den Radius von 0 bis ∞.
4. Ziehen Sie die Wurzel des Ergebnisses.

Wie können Sie unter Verwendung des Parameters a auf den Wert von $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$ gelangen?

9.12 Abhängigkeit von einem Parameter

Für welchen Wert von λ gilt

$$\text{(a)} \int_0^\lambda x^2 dx = 72, \qquad \text{(b)} \int_0^{\sqrt{\lambda}} (x^3 - x) dx = 6?$$