Mathematischer Vorkurs Frühjahr 2005

Privatdozent Dr. Stefan Groote

Aufgabenblatt Nr. 10 – Freitag, 22. April 2005

10.1 Schwingungsgleichung

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ für $\omega \neq 0$ und zeigen Sie

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad \text{(Differentialgleichung der ungedämpften Schwingung).}$$

10.2 Gedämpfte Schwingung

Betrachten Sie die lineare inhomogene Differentialgleichung der Vorlesung,

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$$

und vollziehen Sie noch einmal die Schritte zu ihrer Lösung.

1. Lösen Sie die homogene Differentialgleichung mittels des Eulerschen Ansatzes $x(t) = ce^{at}$.
2. Lösen Sie die charakteristische Gleichung für a und unterscheiden Sie verschiedene Fälle.
3. Wie baut sich die allgemeine Lösung aus den sie erhaltenen Fundamentallösungen auf?
4. Wählen Sie als Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz $x_s(t) = A\sin(\omega_0 t - \varphi)$ einer stationären Lösung und bestimmen Sie A und φ.

10.3 Zweifachintegrale

Berechnen Sie die Zweifachintegrale

$$\text{(a)} \int_1^2 \Big(\int_0^x (1+2t)dt \Big) dx, \qquad \text{(b)} \int_0^4 \Big(\int_x^3 (1-t^2)dt \Big) dx.$$

10.4 Partielle Ableitungen

Bilden Sie die partiellen Ableitungen nach x und y von

$$\text{(a) } 4x^6 + 7y^3, \qquad \text{(b) } \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \text{(c) } (x^2+y^2)\exp(-x^2-y^2).$$

10.5 Wellengleichung

Zeigen Sie, dass der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ für die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$$

auf zwei Differentialgleichungen von der Gestalt in Aufgabe 10.1 und damit auf zwei ungedämpfte Schwingungen führen, die allerdings aneinander gekoppelt sind. Zeigen Sie, dass dieselbe Wellengleichung durch den Ansatz $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ gelöst wird. Was stellen die beiden Anteile dar, und welche Bedeutung kommt der Konstanten c zu?

10.6 Gradient, Divergenz, Rotation

Für $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ und $\vec{A}(x, y, z) = (ay, bx, cz)$ berechne man

$$\text{(a) } \nabla\Phi, \qquad \text{(b) } \nabla \cdot \vec{A}, \qquad \text{(c) } \nabla \times \vec{A}, \qquad \text{(d) } \nabla \cdot (\Phi\vec{A}).$$

Für welche Werte von a, b und c ist das Feld $\vec{A}(x, y, z)$ wirbel- bzw. quellenfrei?

10.7 Laplaceoperator

Berechnen Sie für $\Phi(x, y, z) = 2x^2y - xz^3$ die Ausdrücke $\nabla\Phi$ und $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi$.

10.8 Wegintegral

Ein Teilchen werde in einem Feld entlang verschiedener Bahnen bewegt. Das zugehörige Potential lautet $\Phi = -1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, die Kraft berechnet sich als $\vec{F} = -\nabla\Phi$. Entlang eines Weges vom Punkt A zum Punkt B wird eine Arbeit $W = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ geleistet.

(a) Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$, die auf das Teilchen wirkt, und die Arbeit ...

(b) ... entlang der x-Achse von $A = (x_A, 0, 0)$ nach $B = (x_B, 0, 0)$ (unterscheiden Sie dabei die Fälle $x_A < x_B$ und $x_A > x_B$).

(c) ... entlang des Rechtecks mit den Eckpunkten $A = (2, 1, 0)$, $B = (2, 2, 0)$, $C = (0, 2, 0)$ und $D = (0, 1, 0)$. Warum verschwindet die Arbeit auf dem Gesamtweg?

Hinweis: Verwenden Sie für den letzten Aufgabenteil

$$\int \frac{t\,dt}{(a + t^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{a + t^2}}.$$

Viel Erfolg im Studium!

Es war eine Freude, mit Ihnen/Euch zusammenzuarbeiten.

Stefan Groote und Team