T A R T U Ü L I K O O L
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Rakendusmatemaatika instituut

Helle Trossmann

Ruut- ja kuupsplainidega interpoleerimine

Semestritöö

Juhendajad: Malle Fischer ja Peeter Oja

TARTU 2004

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva semestritöö eesmärgiks on näidata, kuidas konstrueeritakse interpoleerivaid kuup- ja ruutsplaine.

Semestritöö koosneb kolmest osast. Esimeses osas antakse splaini mõiste ja splaini konstrueerimiseks vajalike parameetrite arvu leidmise valem. Teises peatükis vaadeldakse interpoleerivat kuupsplaini. Peatüki esimeses alapunktis konstrueeritakse interpoleeriv kuupsplain kasutades teisi momente, teises alapunktis leitakse interpoleeriv kuupsplain esimesi momente kasutades. Kolmandas peatükis käsitletakse interpoleeriva ruutsplaini konstrueerimist. Peatüki esimene osa hõlmab interpoleeriva ruutsplaini konstrueerimist esimeste momentide kaudu ja teises osas konstrueeritakse interpoleeriv ruutsplain kasutades splaini väärtusi splaini sõlmedes. Lisaks eelnevale on esitatud näide interpoleeriva kuupssplaini konstrueerimiseks kasutades teisi momente. Näide on realiseeritud paketis Mathcad.

1 Splaini mõiste

Olgu $\mathbb{R}$ reaalarvude hulk ja $\mathbb{N}$ naturaalarvude hulk. Vaatleme lõiku $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ja valime sellel lõigul punktid $\xi_i, i = 0, \dots, n$, järgmisel viisil:

$$a \leqslant \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n \leqslant b, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Definitsioon 1. Jaotusele (1.1) vastavaks *m-järku splainiks (defektiga k)* nimetatakse funktsiooni $S_{m,k}$, mis

1) igal osalõigul $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, on ülimalt m-astme polünoom, s.t.

$$S_{m,k}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_{ij}(x - \xi_i)^j, \quad x \in [\xi_i, \xi_{i+1}]; \tag{1.2}$$

2) on $m - k$ korda pidevalt diferentseeruv kogu lõigul $[a, b]$, s.t. $S_{m,k} \in C^{m-k}[a, b]$.

Igal osalõigul $[\xi_{i-1}, \xi_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ on splain $S_{m,k}$ kui m-astme polünoom määratud $m+1$ parameetriga ning seetõttu on splaini $S_{m,k}$ konstrueerimiseks vajalik parameetrite arv $(m + 1)n$.

Nõudest, et $S_{m,k} \in C^{m-k}[a, b]$, saame splainile $(m - k + 1)(n - 1)$ lisatingimust. Seega vabade parameetrite arv, millest splain $S_{m,k}$ jääb sõltuma, on

$$(m + 1)n - (m - k + 1)(n - 1) = m + 1 + k(n - 1). \tag{1.3}$$

Kui splaini $S_{m,k}$ defekt $k = 1$, siis kasutame edaspidi lühemat tähistust $S_m(x) = S_{m,1}(x)$ [1].

2 Interpoleeriv kuupsplain

Olgu jaotuse (1.1) punktides ξ_i, $i = 0, \ldots, n$, teada mingi funktsiooni f väärtused $f_i = f(\xi_i), i = 0, \ldots, n$. Vaatleme jaotusele (1.1) vastavat kuupsplaini S_3, mis interpoleerib funktsiooni f punktides ξ_i, s.t.

$$S_3(\xi_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Kuna vaadeldaval juhul splaini määramiseks vajalike parameetrite arv on $n+3$ (vt. võrdus (1.3)), interpolatsioonitingimusi (2.1) on aga vastukaaluks $n+1$, siis on vaja veel kahte täiendavat tingimust, milleks on sageli rajatingimused [3]

I $S_3''(\xi_0) = \alpha, \quad S_3''(\xi_n) = \beta,$

II $S_3'(\xi_0) = S_3'(\xi_n), \quad S_3''(\xi_0) = S_3''(\xi_n),$

III $S_3'''(\xi_1 + 0) = S_3'''(\xi_1 - 0), \quad S_3'''(\xi_{n-1} + 0) = S_3'''(\xi_{n-1} - 0),$

IV $S_3'(\xi_0) = \alpha, \quad S_3'(\xi_n) = \beta,$

V $S_3''(\xi_0) = S_3''(\xi_1), \quad S_3''(\xi_{n-1}) = S_3''(\xi_n).$

2.1 Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine II momentide abil

Tähistame $M_i = S''(\xi_i)$, $i = 0, \ldots, n$, ja käsitleme järgnevas interpoleeriva kuupsplaini esitust suuruste M_i ehk nn. II momentide kaudu.

Otsime kuupsplaini kujul

$$\begin{aligned} S_3(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - \xi_{i-1}) + a_{i2}(x - \xi_{i-1})^2 + a_{i3}(x - \xi_{i-1})^3, \\ x \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seostest

$$S_3(\xi_{i-1}) = f_{i-1}, \quad S_3(\xi_i) = f_i, \quad S_3''(\xi_{i-1}) = M_{i-1}, \quad S_3''(\xi_i) = M_i$$

saame

$$\begin{aligned} a_{i0} &= f_{i-1}, \\ a_{i0} + h_i a_{i1} + h_i^2 a_{i2} + h_i^3 a_{i3} &= f_i, \\ 2a_{i2} &= M_{i-1}, \\ 2a_{i2} + 6h_i a_{i3} &= M_i, \end{aligned}$$

kus $h_i = \xi_i - \xi_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Selle süsteemi lahendamisel saame

$$\begin{aligned}
a_{i0} &= f_{i-1}, \\
a_{i1} &= \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i M_{i-1}}{2} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}), \\
a_{i2} &= \frac{M_{i-1}}{2}, \\
a_{i3} &= \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}.
\end{aligned}$$

Seega kuupsplain S_3 esitub kujul

$$\begin{aligned}
&S_3(x) = (1-t)f_{i-1} + tf_i - \frac{h_i^2}{6} \cdot t(1-t)((2-t)M_{i-1} + (1+t)M_i), \\
&x \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \quad i = 1, \ldots, n, \quad t = \frac{x - \xi_{i-1}}{h_i}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Leiame kuupsplaini S_3 tuletised

$$S_3'(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{1}{6}h_i\left((2 - 6t + 3t^2)M_{i-1} + (1 - 3t^2)M_i\right), \tag{2.4}$$

$$S_3''(x) = (1-t)M_{i-1} + tM_i, \tag{2.5}$$

$$S_3'''(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}.$$

Seostest (2.3) ja (2.5) on näha vastavalt splaini S_3 ja tema teise tuletise S_3'' pidevus punktides ξ_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Seose (2.4) põhjal võib kirjutada

$$S_3'(\xi_i + 0) = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{1}{6}h_{i+1}(2M_i + M_{i+1}),$$

$$S_3'(\xi_i - 0) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{1}{6}h_i(M_{i-1} + 2M_i).$$

Järelikult selleks, et splaini S_3 esimene tuletis oleks pidev, peavad olema täidetud tingimused

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{1}{6}h_{i+1}(2M_i + M_{i+1}) = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{1}{6}h_i(M_{i-1} + 2M_i),$$

$i = 1, \ldots, n-1$, ehk

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right), \qquad (2.6)$$

kus

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \mu_i, \qquad i = 1, \dots, n-1.$$

Kui võrrandeile (2.6) lisada rajatingimustest tulenevad võrrandid, oleme saanud võrrandisüsteemi, milles on $n + 1$ võrrandit tundmatute M_i, $i = 0, \dots, n$, leidmiseks.

Rajatingimusest I, s.o. tingimustest

$$S_3''(\xi_0) = \alpha, \quad S_3''(\xi_n) = \beta,$$

saame

$$M_0 = \alpha, \quad M_n = \beta. \qquad (2.7)$$

Rajatingimusest II, s.o. tingimustest

$$S_3'(\xi_0) = S_3'(\xi_n), \quad S_3''(\xi_0) = S_3''(\xi_n),$$

saame

$$2h_1 M_0 + h_1 M_1 + h_{n-1} M_{n-1} - 2h_{n-1} M_n = 6 \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_1 - f_0}{h_1} \right),$$

$$M_0 - M_n = 0. \qquad (2.8)$$

Rajatingimustest III, s.o. tingimustest

$$S_3'''(\xi_1 + 0) = S_3'''(\xi_1 - 0), \quad S_3'''(\xi_{n-1} + 0) = S_3'''(\xi_{n-1} - 0),$$

saame

$$M_0 - \frac{M_1 - \mu_1 M_2}{\lambda_1} = 0, \quad M_n - \frac{M_{n-1} - \lambda_{n-1} M_{n-2}}{\mu_{n-1}} = 0.$$

ehk

$$\lambda_1 M_0 - M_1 + \mu_1 M_2 = 0, \quad \lambda_{n-1} M_{n-2} - M_{n-1} + \mu_{n-1} M_n = 0. \qquad (2.9)$$

Rajatingimusest V, s.o. tingimustest

$$S_3''(\xi_0) = S_3''(\xi_1), \quad S_3''(\xi_{n-1}) = S_3''(\xi_n),$$

saame

$$M_0 - M_1 = 0, \quad M_{n-1} - M_n = 0. \tag{2.10}$$

Kokkuvõtteks võib öelda, et erinevatele rajatingimustele I–III vastavate kuupsplainide konstrueerimiseks tuleb lahendada vastavalt süsteemid $\{(2.6), (2.7)\}, \{(2.6), (2.8)\}$ ja $\{(2.6), (2.9)\}$. Seejuures tekkivate võrrandisüsteemide maatriksid on kolmediagonaalsed.

Definitsioon 2. Maatriksit $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ nimetatakse *domineeriva peadiagonaaliga* maatriksiks, kui kehtib

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^n |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Lemma. Domineeriva peadiagonaaliga maatriks on regulaarne.

Tõestus. Olgu maatriks $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ domineeriva peadiagonaaliga maatriks. Selleks, et maatriks A oleks regulaarne, piisab näidata, et

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Olgu $Ax = 0$ ja olgu $|x_k| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Siis

$$(Ax)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = a_{kk}x_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j = 0.$$

Sellest võrdusest saame

$$|a_{kk}x_k| = \left| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j \right|.$$

Kuna

$$|a_{kk}x_k| = |a_{kk}||x_k|$$

ja

$$\left| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n a_{kj}x_j \right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_k|,$$

siis

$$|a_{kk}||x_k| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n |a_{kj}||x_k|.$$

Kui $|x_k| \neq 0$, siis $|a_{kk}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}} |a_{kj}|$, mis on aga vastuolus eeldusega, et A on domineeriva peadiagonaaliga maatriks. Kui $|x_k| = 0$ ehk $x = 0$, siis tingimus $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ on täidetud. Sellega on lemma tõestatud. $\square$

Kontrollime, kas tekkivate süsteemide maatriks on domineeriva peadiagonaaliga. Osutub, et

$$2 - \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right) = 2 - 1 > 0,$$

seega tekkinud võrrandisüsteemi maatriks on domineeriva peadiagonaaliga. Saame kasutada lemmat.

2.2 Interpoleeriva kuupsplaini konstrueerimine I momentide abil

Tähistame $m_i = S_3'(\xi_i), i = 0, \ldots, n$, ning käsitleme järgnevas interpoleeriva kuupsplaini esitust suuruste m_i ehk I momentide kaudu.

Otsime kuupsplaini kujul (2.2), s.o. kujul

$$S_3(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - \xi_{i-1}) + a_{i2}(x - \xi_{i-1})^2 + a_{i3}(x - \xi_{i-1})^3,$$

$x \in [\xi_{i-1}, \xi_i], i = 1, \ldots, n.$

Seostest

$$S_3(\xi_{i-1}) = f_{i-1}, \quad S_3(\xi_i) = f_i, \quad S_3'(\xi_{i-1}) = m_{i-1}, \quad S_3'(\xi_i) = m_i$$

saame

$$\begin{aligned} a_{i0} &= f_{i-1}, \\ a_{i0} + h_i a_{i1} + h_i^2 a_{i2} + h_i^3 a_{i3} &= f_i, \\ a_{i1} &= m_{i-1}, \\ a_{i1} + 2h_i a_{i2} + 3h_i^2 a_{i3} &= m_i, \end{aligned}$$

kus $h_i = \xi_i - \xi_{i-1}, i = 1, \ldots, n$. Vaadeldava süsteemi lahendamisel saame

$$\begin{aligned} a_{i0} &= f_{i-1}, \\ a_{i1} &= m_{i-1}, \\ a_{i2} &= \frac{3}{h_i^2}(f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{h_i}(2m_{i-1} + m_i), \\ a_{i3} &= \frac{2}{h_i^3}(f_{i-1} - f_i) + \frac{1}{h_i^2}(m_{i-1} + m_i). \end{aligned}$$

Seega kuupsplain S_3 esitub kujul

$$S_3(x) = (1-t)^2(1+2t)f_{i-1}+t^2(3-2t)f_i+h_it(1-t)((1-t)m_{i-1}+tm_i), \quad (2.11)$$

$x \in [\xi_{i-1}, \xi_i], t = \dfrac{x-\xi_{i-1}}{h_i}, i = 1, \dots, n.$

Leiame kuupsplaini S_3 tuletised

$$S_3'(x) = \frac{6t}{h_i}(1-t)(f_i - f_{i-1}) + t(3t-2)m_i + (1-4t+3t^2)m_{i-1}, \quad (2.12)$$

$$S_3''(x) = \frac{6-12t}{h_i^2}(f_i - f_{i-1}) + \frac{6t-4}{h_i}m_{i-1} + \frac{6t-2}{h_i}m_i, \quad (2.13)$$

$$S_3'''(x) = -\frac{12}{h_i^3}(f_i - f_{i-1}) + \frac{6}{h_i^2}(m_{i-1} + m_i).$$

Võrdustest (2.10) ja (2.11) on näha vastavalt splaini S_3 ja tema esimese tuletise S_3' pidevus punktides $\xi_i, i = 1, \dots, n-1$. Seose (2.12) põhjal võib kirjutada

$$\begin{aligned} S_3''(\xi_i + 0) &= 6\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}^2} - \frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}}, \\ S_3''(\xi_i - 0) &= -6\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i^2} + \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i}. \end{aligned}$$

Järelikult selleks, et splaini S_3 teist järku tuletis oleks pidev, peavad olema täidetud tingimused

$$6\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}^2} - \frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} = -6\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i^2} + \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

ehk

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = 3\left(\mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} + \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \quad (2.14)$$

kus

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \mu_i, i = 1, \dots, n-1.$$

Kui võrranditele (2.13) lisada rajatingimustest tulenevad võrrandid, oleme saanud võrrandisüsteemi, milles on $n+1$ võrrandit tundmatute $m_i, i = 0, \dots, n$, leidmiseks. Näiteks rajatingimustest IV, s.o. tingimustest

$$S_3'(\xi_0) = \alpha, \quad S_3'(\xi_n) = \beta$$

saame

$$m_0 = \alpha, \quad m_n = \beta. \tag{2.15}$$

Rajatingimusele IV vastava kuupsplaini konstrueerimiseks tuleb lahendada süsteem $\{(2.13), (2.14)\}$. Tekkiva võrrandisüsteemi maatriks on kolmediagonaalne. Kontrollime, kas võrrandisüsteemi maatriks on domineeriva peadiagonaaliga. Kuna

$$2 - \left(\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right) = 2 - 1 = 1 > 0,$$

siis on tegemist domineeriva peadiagonaaliga maatriksiga. Lemma põhjal on tekkinud võrrandisüsteem üheselt lahenduv.

3 Interpoleeriv ruutsplain

Olgu antud punktid x_i, $i = 1, \ldots, n$, nii et

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

ja olgu neis punktides teada mingid funktsiooni f väärtused $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Valime seejärel punktid ξ_i, $i = 0, \ldots, n$, nii et

$$\xi_0 \leqslant x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \cdots < \xi_{i-1} < x_i < \xi_i < \cdots < \xi_{n-1} < x_n \leqslant \xi_n.$$

Vaatleme järgnevas jaotusele

$$\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n$$

vastavat ruutsplaini $S_2(x)$, mis rahuldab tingimusi

$$S_2(x_i) = f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Kuna splaini S_2 määramiseks on vaja $n + 2$ parameetrit (vt (1.3)), siis lisame interpolatsioonitingimustele (3.1) veel 2 rajatingimust [2]. Kasutame edaspidi rajatingimusi

$$S_2(\xi_0) = \alpha_1, \quad S_2(\xi_n) = \beta_1$$

ja

$$S_2'(\xi_0) = \alpha_2, \quad S_2'(\xi_n) = \beta_2.$$

Esimest paari neist rajatingimustest saame kasutada juhul, kui $\xi_0 < x_1$ ja $x_n < \xi_n$.

3.1 Interpoleeriva ruutsplaini konstrueerimine I momentide abil

Tähistame

$$S_2'(\xi_i) = m_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$

ja

$$h_i = \xi_i - \xi_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Siis $x_i = \xi_{i-1} + \theta_i h_i$, kus $\theta_1 \in [0, 1)$, $\theta_n \in (0, 1]$ ja $\theta_i \in (0, 1)$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Otsime interpoleerivat ruutsplaini kujul

$$S_2(x) = b_{i0} + b_{i1}(x - \xi_{i-1}) + b_{i2}(x - \xi_{i-1})^2, \quad x \in [\xi_{i-1}, \xi_i].$$

Seostest

$$S_2(x_i) = f_i, \quad S_2'(\xi_{i-1}) = m_{i-1}, \quad S_2'(\xi_i) = m_i$$

saame

$$\begin{aligned} b_{i1} &= m_{i-1}, \\ b_{i1} + 2b_{i2}h_i &= m_i, \\ b_{i0} + b_{i1}(x_i - \xi_{i-1}) + b_{i2}(x_i - \xi_{i-1})^2 &= f_i, \end{aligned}$$

kus $h_i = \xi_i - \xi_{i-1}$. Neist võrrandeist leiame

$$\begin{aligned} b_{i0} &= f_i - m_{i-1}\theta_i h_i - \frac{m_i - m_{i-1}}{2}\theta_i^2 h_i, \\ b_{i1} &= m_{i-1}, \\ b_{i2} &= \frac{m_i - m_{i-1}}{2h_i}. \end{aligned}$$

Seega ruutsplain S_2 esitub kujul

$$S_2(x) = f_i + ((1-\theta_i)m_{i-1} + \theta_i m_i)(x - x_i) + \frac{m_i - m_{i-1}}{2h_i}(x - x_i)^2,$$

$x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$, ehk kujul

$$S_2(x) = f_i + h_i((1-\theta_i)m_{i-1} + \theta_i m_i)(\tau - \theta_i) + \frac{h_i}{2}(m_i - m_{i-1})(\tau - \theta_i)^2,$$

kus $\tau = \dfrac{x - \xi_{i-1}}{h_i}$, $\tau \in [0, 1]$.

Ruutsplaini S_2) tuletised on

$$S_2'(x) = (1-\theta_i)m_{i-1} + \theta_i m_i + (m_i - m_{i-1})\tau - (m_i - m_{i-1})\theta_i,$$

ehk

$$S_2'(x) = (1-\tau)m_{i-1} + \tau m_i, \tag{3.2}$$
$$S_2''(x) = m_i - m_{i-1}.$$

Võrdusest (3.2) on näha ruutsplaini S_2 esimese tuletise pidevus punktis ξ_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Et splain S_2 oleks pidev punktis ξ_i,$i = 1, \ldots, n-1$, peavad olema täidetud järgmised tingimused

$$f_{i+1} + h_{i+1}((1-\theta_{i+1})m_i + \theta_{i+1}m_{i+1})(-\theta_{i+1}) + \frac{h_{i+1}}{2}(m_{i+1} - m_i)\theta_{i+1}^2 =$$

$$= f_i + h_i((1-\theta_i)m_{i-1} + \theta_i m_i)(1 - \theta_i) + \frac{h_i}{2}(m_i - m_{i-1})(1-\theta_i)^2$$

ehk

$$\lambda_i m_{i-1} + m_i + \mu_i m_{i+1} = 2\frac{f_{i+1} - f_i}{(1-\theta_i^2)h_i + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}}, \tag{3.3}$$

kus

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{(1-\theta_i)^2 h_i}{(1-\theta_i^2)h_i + \theta_{i+1}(2-\theta_{i+1})h_{i+1}}, \\
\mu_i &= \frac{\theta_{i+1}^2 h_{i+1}}{(1-\theta_i^2)h_i + \theta_{i+1}(2-\theta_{i+1})h_{i+1}},
\end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n-1$.

Kui võrrandeile (3.3) lisada rajatingimustest tulenevad võrrandid, oleme saanud võrrandisüsteemi, milles on $n+1$ võrrandit tundmatute m_i, $i = 0, \ldots, n$, leidmiseks. Rajatingimustest

$$S_2'(\xi_0) = \alpha_2, \quad S_2'(\xi_n) = \beta_2,$$

saame

$$m_0 = \alpha_2, \quad m_n = \beta_2. \tag{3.4}$$

Rajatingimustele vastavate ruutsplainide konstrueerimiseks tuleb lahendada vastavalt süsteem $\{(3.3),(3.4)\}$. Seejuures tekkiva võrrandisüsteemi maatriks on kolmediagonaalne. Kontrollime, kas tekkinud maatriks on domineeriva peadiagonaaliga. Selleks on vaja, et

$$1 - \frac{h_i(1-\theta_i)^2 + \theta_{i+1}^2 h_{i+1}}{(1-\theta_i^2)h_i + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}} > 0.$$

Kuna

$$\frac{h_i(1-\theta_i)^2 + \theta_{i+1}^2 h_{i+1}}{(1-\theta_i^2)h_i + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}} = \frac{h_i(1-\theta_i)(1-\theta_i) + \theta_{i+1}^2 h_{i+1}}{(1-\theta_i^2)h_i + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}} <$$

$$< \frac{h_i(1-\theta_i)(1+\theta_i) + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}}{(1-\theta_i^2)h_i + (2-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}} = 1,$$

sest $1-\theta_i < 1+\theta_i$ ja $\theta_{i+1} < 2-\theta_{i+1}$, siis on vaadeldav maatriks domineeriva peadiagonaaliga ning lemma põhjal on tekkinud võrrandisüsteem üheselt lahenduv.

3.2 Interpoleeriva ruutsplaini konstrueerimine splaini väärtuste kaudu splaini sõlmedes

Tähistame
$$S_2(\xi_i) = S_i, \quad i = 0, \ldots, n,$$
ja
$$h_i = \xi_i - \xi_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
Siis $x_i = \xi_{i-1} + \theta_i h_i$, kus $\theta_1 \in [0,1)$, $\theta_n \in (0,1]$ ja $\theta_i \in (0,1)$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Otsime interpoleerivat ruutsplaini kujul

$$S_2(x) = b_{i0} + b_{i1}(x - \xi_{i-1}) + b_{i2}(x - \xi_{i-1})^2, \quad x \in [\xi_{i-1}, \xi_i].$$

Seostest
$$S_2(x_i) = f_i, \quad S_2(\xi_{i-1}) = S_{i-1}, \quad S_2(\xi_i) = S_i$$
saame

$$\begin{aligned} b_{i0} &= S_{i-1}, \\ b_{i0} + b_{i1}h_i + b_{i2}h_i^2 &= S_i, \\ b_{i0} + b_{i1}(x_i - \xi_i) + b_{i2}(x_i - \xi_i)^2 &= f_i. \end{aligned}$$

Neist võrrandeist leiame

$$\begin{aligned} b_{i0} &= S_{i-1}, \\ b_{i1} &= \frac{(S_{i-1} - S_i)\theta_i^2 - (S_{i-1} - f_i)}{h_i\theta_i(1-\theta_i)}, \\ b_{i2} &= \frac{(S_{i-1} - f_i) - \theta_i(S_{i-1} - S_i)}{h_i^2\theta_i(1-\theta_i)}. \end{aligned}$$

Seega ruutsplain esitub kujul

$$S_2(x) = S_{i-1} + \frac{(S_{i-1} - S_i)\theta_i^2 - (S_{i-1} - f_i)}{\theta_i(1-\theta_i)h_i}(x - \xi_{i-1}) +$$

$$+ \frac{(S_{i-1} - f_i) - \theta_i(S_{i-1} - S_i)}{\theta_i(1-\theta_1)h_i^2}(x - \xi_{i-1})^2$$

ehk kujul

$$S_2(x) = S_{i-1} + \frac{(S_{i-1} - S_i)\theta_i^2 - (S_{i-1} - f_i)}{\theta_i(1-\theta_i)}\tau + \frac{(S_{i-1} - f_i) - \theta_i(S_{i-1} - S_i)}{\theta_i(1-\theta_i)}\tau^2, \tag{3.5}$$

kus $\tau = \dfrac{x-\xi_{i-1}}{h_i}$. Leiame ruutsplaini $S_2(x)$ tuletised

$$S_2'(x) = \frac{(S_{i-1}-S_i)\theta_i^2-(S_{i-1}-f_i)}{\theta_i(1-\theta_i)h_i} + \frac{2((S_{i-1}-f_i)-\theta_i(S_{i-1}-S_i))}{\theta_i(1-\theta_i)h_i}\tau, \quad (3.6)$$

$$S_2''(x) = \frac{2((S_{i-1}-f_i)-\theta_i(S_{i-1}-S_i))}{\theta_i(1-\theta_i)h_i^2}.$$

Seosest (3.5) on näha splaini pidevus punktides $\xi_i, i = 1,\ldots,n-1$. Seose (3.6) põhjal võib kirjutada

$$S_2'(\xi_i+0) = \frac{(S_i-S_{i+1})\theta_{i+1}^2-(S_i-f_{i+1})}{\theta_{i+1}(1-\theta_{i+1})h_{i+1}},$$

$$S_2'(\xi_i-0) = \frac{(S_{i-1}-S_i)\theta_i^2-(S_{i-1}-f_i)}{\theta_i(1-\theta_i)h_i} + \frac{2((S_{i-1}-f_i)-\theta_i(S_{i-1}-S_i))}{\theta_i(1-\theta_i)h_i}.$$

Järelikult selleks, et splaini S_2 esimene tuletis oleks pidev punktis ξ_i, $i = 1,\ldots,n-1$, peavad olema täidetud tingimused

$$\frac{(S_i-S_{i+1})\theta_{i+1}^2-(S_i-f_{i+1})}{\theta_{i+1}(1-\theta_{i+1})h_{i+1}} =$$

$$= \frac{(S_{i-1}-S_i)\theta_i^2-(S_{i-1}-f_i)}{\theta_i(1-\theta_i)h_i} + \frac{2((S_{i-1}-f_i)-\theta_i(S_{i-1}-S_i))}{\theta_i(1-\theta_i)h_i}.$$

$$\frac{1-\theta_i}{\theta_i h_i}S_{i-1} + \left(\frac{1+\theta_{i+1}}{\theta_{i+1}h_{i+1}} + \frac{2-\theta_i}{(1-\theta_i)h_i}\right)S_i + \frac{\theta_{i+1}}{(1-\theta_{i+1})h_{i+1}}S_{i+1} =$$

$$= \frac{f_{i+1}}{\theta_{i+1}(1-\theta_{i+1})h_{i+1}} + \frac{f_i}{\theta_i(1-\theta_i)h_i}$$

ehk

$$\lambda_i S_{i-1} + S_i + \mu_i S_{i+1} = \mu_i \frac{f_{i+1}}{\theta_{i+1}^2} + \lambda_i \frac{f_i}{(1-\theta_i)^2}, \quad (3.7)$$

kus

$$\lambda_i = \frac{(1-\theta_i)^2\theta_{i+1}h_{i+1}}{(1-\theta_i)(1-\theta_{i+1})\theta_i h_i + (2-\theta_i)\theta_i\theta_{i+1}h_{i+1}},$$

$$\mu_i = \frac{(1-\theta_i)\theta_{i+1}^2 h_i}{(1-\theta_{i+1}^2)(1-\theta_i)h_i + (2-\theta_i)(1-\theta_{i+1})\theta_{i+1}h_{i+1}},$$

$i = 1,\ldots,n-1$. Kui võrrandeile (3.7) lisada rajatingimustest tulenevad võrrandid, oleme saanud võrrandisüsteemi, milles on $n+1$ võrrandit tundmatute S_i, $i = 0,\ldots,n$, leidmiseks. Rajatingimustest

$$S_2'(\xi_0) = \alpha_2, \quad S_2'(\xi_n) = \beta_2,$$

saame

$$= \alpha_2, \quad S_n = \beta_2. \tag{3.8}$$

Erinevatele rajatingimustele vastavate ruutsplainide konstrueerimiseks tuleb lahendada süsteem {(3.7),(3.8)}. Seejuures tekkiv võrrandisüsteemi maatriks on kolmediagonaalne. Kontrollime, kas tekkinud maatriks on domineeriva peadiagonaaliga. Selgub, et lemma rakendamiseks vajalik peadiagonaali domineerimine on maatriksis juhul kui $\theta_i \in (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Kui θ_i kuulub sellesse vahemikku, siis

$$\left(\frac{1+\theta_{i+1}}{\theta_{i+1}h_{i+1}} + \frac{2-\theta_i}{(1-\theta_i)h_i}\right) - \left(\frac{1-\theta_i}{\theta_i h_i} + \frac{\theta_{i+1}}{(1-\theta_{i+1})h_{i+1}}\right) > 0$$

ja saame kasutada lemmat.

Kasutatud kirjandus

1. Tamme, E., Võhandu, L., Luht, L. Arvutusmeetodid I, 2.tr, Tln, 1986

2. Oja, P., Comonotone adaptive interpolating splines, *BIT*, 2002, **42**, 4, 842-855

3. Завьялов, Ю. С., Квасов, Б. И., Мирошниченко, В. Л., Методы сплайн-функций, Москва, 1980

Interpolating with quadratic and cubic splines

Helle Trossmann

Summary

The main goal of current term paper is to find formulae for constructing interpolating quadratic and cubic splines. The paper can be divided into three main parts. In the first chapter we define the notion of spline and gives a rule for finding the number of parameters needed to construct interpolating splines. In the second part of the paper interpolating cubic splines are considered. Third chapter examines interpolating quadratic splines. Term paper is finished with an example of constructing an interpolating cubic spline using given data.

Second and first moments are used to construct interpolating cubic splines; first moments and spline values in spline knots are used for interpolating quadratic splines. The implementation of the example was done with Mathcad.