

Digitaalelektronika

II loeng

kahendsüsteem
Loogikaelemendid



Meeldetuletus

- kahendarvud
 - numbrite 0 ja 1 baasil
 - elektroonikas realiseeritav kindlate pingeväärtuste abil





II loengu sisu

- aritmeetikatehted kahendsüsteemis
 - liitmine, lahutamine jne.
- Boole'i algebra
- kombinatsioonelemendid
 - VÕI, NING, EI, VÕI-EI, NING-EI, välistav-VÕI

Tehted kahendarvudega



- liitmine
- lahutamine
- korrutamine
- jagamine
- nihketehted



Kahendarvu liitmine

- liitmine nagu ka teistes arvusüsteemides

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$ ja ülekanne 1 järgmisse järku

$$89_{10} + 19_{10} = ?$$

$$89_{10} = 1011001_2$$

$$19_{10} = 10011_2$$

$$\begin{array}{r} 1011001_2 \\ + 10011_2 \\ \hline = 1101100_2 \end{array}$$

$$1011001_2 = 108_{10}$$



Täiendkood

- kahendarvu täiendkoodi saamiseks tuleb arv viia pöördkoodi ja liita 1

$$X_t = |\overline{X}| + 1 \quad \text{pöördkood} - \text{kõik 0-d ja 1-d vahetuses}$$

$$|-37_{10}| = 37_{10} = 0100101_2$$

$$\text{inverteerimine} \quad 1011010_2$$

$$\text{liita } 1 \quad \underline{\quad\quad\quad 1_2}$$

$$-37_{10} = \underline{1011011_2}$$

negatiivse arvu märgibitt

Kontroll:

negatiivse ja positiivse arvu summa on 0

$$+37_{10} = 0100101_2$$

$$-37_{10} = \underline{1011011_2}$$

$$(1)000000_2$$

ülekanne bitt



Kahendarvu lahutamine

- $A - B$
 - sarnaselt kümnendarvudega
 - vajadusel laenamine järgmiselt kohalt
- $A - B = A + (B)_t$
 - tehe tuleb teostada koos märgibitiga

$$23_{10} - 14_{10} = ?$$

$$23_{10} = 10111_2$$

$$14_{10} = 1110_2$$

$$-14_{10} = 10001_2 + 1_2 = 10010_2$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 10010_2 \\ \hline = 101001_2 \end{array}$$

$$1001_2 = 9_{10}$$

7

3/4/2009



Kahendarvude korrutamine

- aluseks on korrutustabel
 - $0.0 = 0$
 - $0.1 = 0$
 - $1.0 = 0$
 - $1.1 = 1$
- mitmekohalise arvu korrutamine sarnaselt kümnendarvudega

3/4/2009

8

Kahendarvude korrutamine



korrutamist võib alustada nii madalamatest, kui kõrgematest bittidest

alustatakse noorematest bittidest

$$\begin{array}{r} 1001_2 = 9_{10} \\ \times 1011_2 = 11_{10} \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ 0000 \\ + 1001 \quad \text{nihe vasakule} \\ \hline 1100011 = 99_{10} \end{array}$$

alustatakse vanematest bittidest

$$\begin{array}{r} 1001_2 = 9_{10} \\ \times 1011_2 = 11_{10} \\ \hline 1001 \\ \text{nihe paremale } 0000 \\ 1001 \\ \hline 1001 + \\ \hline 1100011 = 99_{10} \end{array}$$

3/4/2009

9

kahendarvude jagamine



- toimub jagajast jäägi lahutamisega
 - kui jagaja on jäägist väiksem on lahutamine võimalik ja vastava koha väärtus on 1
 - kui jagaja on jäägist suurem tuleb jagajat nihutada ühe koha võrra paremale ja vastava koha väärtus on 0
 - negatiivsete arvude jagamisel teostatakse jagamistehe absoluutväärtustega
 - kui arvude märgid on erinevad teisendatakse jagatis täiendkoodi

3/4/2009

10

kahendarvude jagamine



$$35_{10} / 5_{10} = 7_{10}$$

$$35_{10} = 100011_2$$

$$5_{10} = 101_2$$

$$7_{10} = 111_2$$

100011	
101	0
1000	
101	1
00111	
101	1
000101	
101	1
0	

} MSB

} 111_2

} LSB

Nihketehted



- võimaldavad kiirendada korrutamise- ja jagamistehteid
 - nihe vasakule suurendab arvu väärtust 2 korda
 - nihe paremale vähendab arvu väärtust 2 korda
- aritmeetiline nihe
 - paremale nihutamisel nooremad bitid kaovad
 - vanemate bittide kohad täituvad 0-dega
 - vasakule nihe siis, kui vanemad bitid 0-d, muidu ületäitumine
 - negatiivse arvu korral säilitada märgibitt 1

Nihketehted



- loogiline nihe
 - väljanihkuvad bitid kaovad ja tühjad kohad täidetakse 0-ega
- tsükliline ehk ringnihe
 - ühelt poolt väljuvad bitid kantakse üle teisele poole tühjadele kohtadele

Paarsuskontroll



- võimaldab avastada vigu (andmete edastamisel)
 - lisatakse täiendav bitt kokkulepitud kriteeriumi järgi
 - vastuvõtja testib sama kriteeriumi järgi bittide vastavust paarsuskontrolli bitile
- kriteeriumid näit. andmesõna ja paarsusbitti "1"-de arv peab olema
 - paarisarv $\underline{0} 001 1101_2$
 - paaritu arv $\underline{1} 001 1101_2$

Boole'i algebra



3/4/2009

15

Boole'i postulaadid



Kasutatakse kolme tehet: NING (\cdot), VÕI ($+$) ja EI (! või katus)

Pretsedents: esimesena EI, siis NING ja viimaks VÕI

Mõningad aksioomid:

$$0 \cdot 0 = 0; 1 + 1 = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1; 0 + 0 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Lisaks } \overline{\overline{1}} = 0 \text{ ja } \overline{\overline{0}} = 1$$

3/4/2009

16



- duaalsus – võib vahetada kõik VÕI-d (+) NING-ga (.) ja kõik 1-d 0-dega või vastupidi

- T1. kommutatiivsus
 - $A + B = B + A$
 - $A.B = B.A$
- T2. assotsiatiivsus
 - $(A + B) + C = A + (B + C)$
 - $(A.B).C = A.(B.C)$
- T3. distributiivsus
 - $A.(B + C) = A.B + A.C$
 - $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$

3/4/2009

17



- T4. identsus
 - $A + A = A$
 - $A.A = A$
- T5. kombineeruvus
 - $A.B + A.\bar{B} = A$
 - $(A + B).(A + \bar{B}) = A$
- T6. liigsus
 - $A + A.B = A$
 - $A.(A + B) = A$
- T7.
 - $0 + A = A$
 - $1.A = A$
- T8.
 - $1 + A = 1$
 - $0.A = 0$
- T9.
 - $A + \bar{A} = 1$
 - $A.\bar{A} = 0$

3/4/2009

18



- T10. identsus
 - $A + \bar{A}B = A + B$
 - $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
- T11. De Morgan'i teoreemid
 - $\overline{(\bar{A} + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
 - $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$

A	B	f(A,B)
0	0	
1	0	
0	1	
1	1	

Saab tõestada eelnevate teoreemide abil
või olekutabeleid kasutades
Keerulisematel juhtudel CAD programmid

Kombinatsioonielemendid



VÕI lülitus



OR

loogiline liitmine

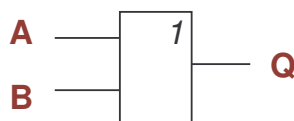
$$Q = A + B$$

sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

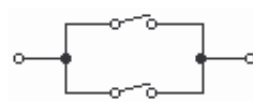
USA:



IEC:



lülititega:



NING lülitus



AND

loogiline korrutamine

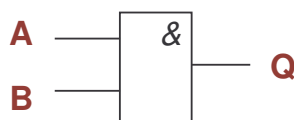
$$Q = A.B$$

sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

USA:



IEC:



lülititega:



kasulik näiteks korrutamisel

EI lülitus



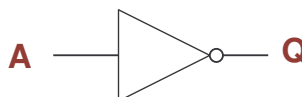
loogiline eitus

$$Q = \bar{A}$$

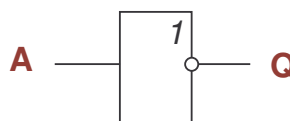
sisend	väljund
A	Q
0	1
1	0

NOT

USA:



IEC:



lülititega:



kasulik näiteks täiendkoodi leidmisel

loogiliselt täielik süsteem



- kasutades kolme eeltoodud lülitust on võimalik realiseerida mistahes loogikafunktsiooni

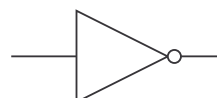
VÕI



NING



EI



Boole'i algebrat kasutades

$$Q = A.\bar{B} + \bar{A}.B$$

VÕI-EI lülitus



liitmise eitus

$$Q = \overline{A + B}$$

sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

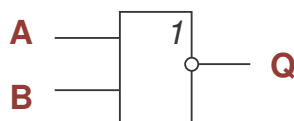
3/4/2009

NOR

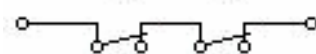
USA:



IEC:



lülititega:



25

NING-EI lülitus



korrumise eitus

$$Q = \overline{A \cdot B}$$

sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

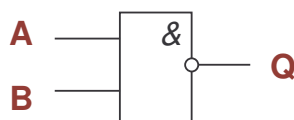
3/4/2009

NAND

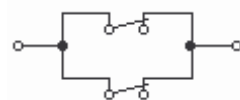
USA:



IEC:



lülititega:



26



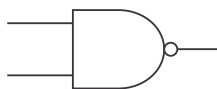
loogiliselt täielik süsteem II

- mistahes loogikafunktsiooni saab realiseerida kasutades vaid VÕI-EI või NING-EI lülitusi

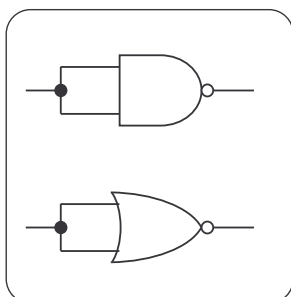
VÕI-EI



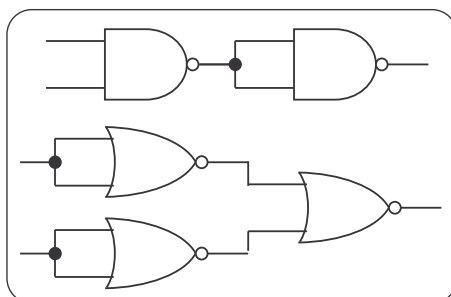
NING-EI



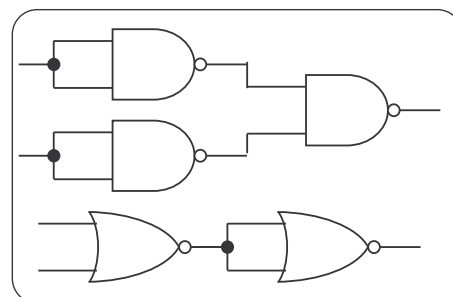
EI



NING



VÕI



Välistav VÕI



eksklusiivne VÕI

$$Q = A \oplus B$$

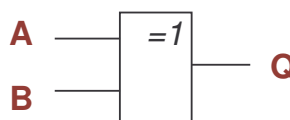
sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

XOR

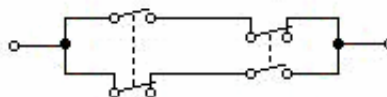
USA:



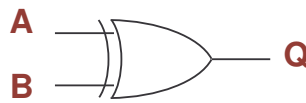
IEC:



lülititega:

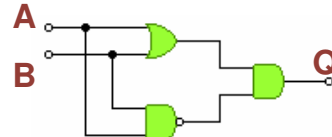
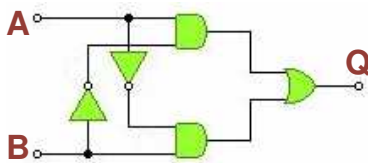


Välistava VÕI realiseerimine



$$Q = A \oplus B = \bar{A}.B + \bar{B}.A$$

$$Q = A \oplus B = (A + B).(\bar{A}.B)$$



Harjutamiseks: tõestada ja realiseerida XOR lülitus järgnevate valemite abil

$$Q = A \oplus B = \overline{A.B} + \overline{\bar{A}.B}$$

$$Q = A \oplus B = (A + B).(\bar{A} + \bar{B})$$

Välistav VÕI-EI



ekvivalentsfunktsioon

$$Q = A.B + \bar{A}.\bar{B}$$

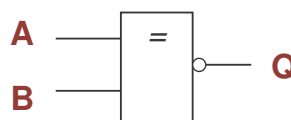
sisendid		väljund
A	B	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

XNOR

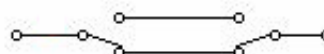
USA:



IEC:



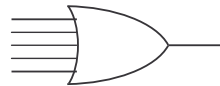
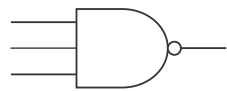
lülititega:



Sisendite arv



- VÕI, NING, VÕI-EI ja NING-EI sisendite arv võib olla ka suurem, kui 2



- EI on alati ühe sisendiga
- välistav VÕI ja välistav VÕI-EI on alati kahe sisendiga

3/4/2009

31

Näide: kolmene veksellüliti



- ruumis kolm ust ja iga ukse juures üks lüliti
- vaid üks lamp
 - väljas, kui kõik lülitid väljas
 - põleb, kui üks lüliti sees, kaks väljas
 - väljas, kui kaks lülitit sees, üks väljas
 - põleb, kui kõik kolm lülitit sees
- koostada olekutabel
- defineerida funktsioon nende kombinatsioonide summana, mis annavad tulemuseks ühe

3/4/2009

32

Positiivne ja negatiivne loogika



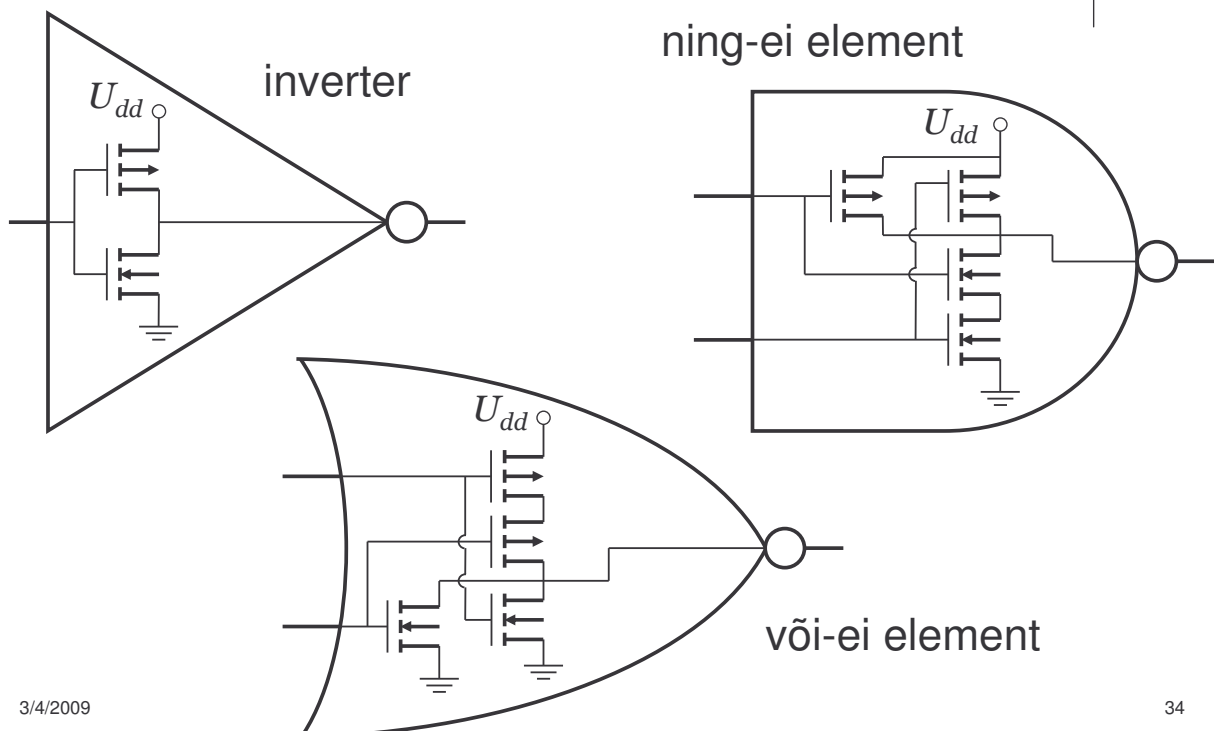
duaalsus

positiivse loogika funktsioon	positiivse loogikalülituse sümbol	negatiivse loogikalülituse sümbol
VÕI		
NING		
VÕI-EI		
NING-EI		
EI		

3/4/2009

33

Ülitused KMOP baasil



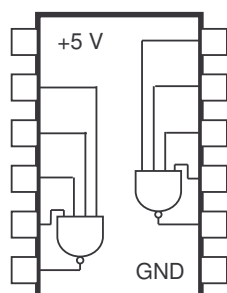
3/4/2009

34

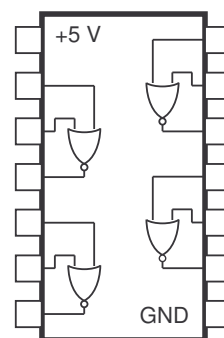


- saadaval eraldi kividena

- sageli 14 jalaga: 4x2, 3x3 või 2x4 sisendiga NOR, NAND, OR, AND, XOR etc.



3/4/2009



35