

β -reduktsioon

- λ -termide väärtustamine toimub **reduktsiooni reeglite** korduva rakendamise kaudu.
- **β -reduktsiooni** reegel:

$$(\lambda x. e_1) e_2 \rightarrow_{\beta} e_1[x \mapsto e_2]$$
- Alamavaldist kujul $(\lambda x. e_1) e_2$ nimetatakse (**β -**)reedeksiks.
- NB! λ -termis võib olla palju reedekseid.
- Ilma (**β -**)reedeksiteta λ -term on (**β -**)normaalkujul.
- Näited:

 $\lambda x. x (\lambda y. x)$

reedekseid ei ole (so. normaalkuju)

 $\lambda x. (\lambda y. y) 3$

üks reedeks

 $\lambda f. f \left(\underline{((\lambda x. x) 3)} \right) \left(\underline{((\lambda x. x) 4)} \right)$

kaks reedeksit

 $\underline{(\lambda f. f \left(\underline{((\lambda x. x) 3)} \right))} (\lambda x. x)$

kaks (kattuvat) reedeksit

β -reduktsioon

Ühesammuline β -reduktsioon:

$$\overline{(\lambda x. e_1) e_2 \rightarrow_{\beta} e_1[x \mapsto e_2]}$$

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e_2}{e_1 e_0 \rightarrow_{\beta} e_2 e_0}$$

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e_2}{e_0 e_1 \rightarrow_{\beta} e_0 e_2}$$

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e_2}{\lambda x. e_1 \rightarrow_{\beta} \lambda x. e_2}$$

β -reduktsioon

- Mitmesammuline β -reduktsioon:

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e_2}{e_1 \twoheadrightarrow_{\beta} e_2}$$

$$\frac{}{e \twoheadrightarrow_{\beta} e}$$

$$\frac{e_1 \twoheadrightarrow_{\beta} e_2 \quad e_2 \twoheadrightarrow_{\beta} e_3}{e_1 \twoheadrightarrow_{\beta} e_3}$$

- NB! Antud definitsioon ei määra reduktsioonide järjekorda.
- Näide:

$$\begin{aligned} \underline{(\lambda f. f ((\lambda x. x) 3)) (\lambda x. x)} &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) ((\lambda x. x) 3)} \\ &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) 3} \\ &\rightarrow_{\beta} 3 \\ (\lambda f. f \underline{((\lambda x. x) 3)}) (\lambda x. x) &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda f. f 3) (\lambda x. x)} \\ &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) 3} \\ &\rightarrow_{\beta} 3 \end{aligned}$$

β -reduktsioon

- β -konversioon:

$$\frac{e_1 \rightarrow_{\beta} e_2}{e_1 =_{\beta} e_2}$$

$$\frac{e_2 =_{\beta} e_1}{e_1 =_{\beta} e_2}$$

$$\frac{e_1 =_{\beta} e_2 \quad e_2 =_{\beta} e_3}{e_1 =_{\beta} e_3}$$

- β -ekspansioon:

$$\frac{e_2 \rightarrow_{\beta} e_1}{e_1 \leftarrow_{\beta} e_2}$$

η -reduktsioon

- η -reduktsiooni reegel:

$$\lambda x. e x \rightarrow_{\eta} e \quad x \notin \text{FV}(e)$$

- η -reduktsioon vastab funktsioonide ekstensionaalsuse omadusele

Reduktsiooni järjekorrad

- Reduktsiooni järjekord ei oma tähtsust!
- **Church-Rosseri teoreem:** iga λ -termi e_0 , e_1 ja e_2 korral, kui $e_0 \rightarrow_{\beta} e_1$ ja $e_0 \rightarrow_{\beta} e_2$, siis leidub e_3 selline et $e_1 \rightarrow_{\beta} e_3$ ja $e_2 \rightarrow_{\beta} e_3$.
- Järeldus: λ -termide normaalkujud on unikaalsed.
- NB! Normaalkuju leidumine ei ole garanteeritud!
- Näide:

$$\begin{array}{l}
 (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) \\
 \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) \\
 \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) \\
 \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x x) (\lambda x. x x) \\
 \dots
 \end{array}$$

Reduktsiooni järjekorrad

- Reduktsiooni järjekord on oluline!
- **Normaaljärjekord**: alati redutseerida vasakpoolne väline reedeks.

$$\underline{(\lambda x. y)((\lambda x. x x)(\lambda x. x x))} \rightarrow_{\beta} y$$

- **Aplikatiivne järjekord**: alati redutseerida vasakpoolne sisemine reedeks.

$$\begin{aligned} & (\lambda x. y)((\lambda x. x x)(\lambda x. x x)) \\ \rightarrow_{\beta} & (\lambda x. y)(\underline{(\lambda x. x x)(\lambda x. x x)}) \\ & \dots \end{aligned}$$

- **Normaliseerimisteoreem**: kui λ -termil leidub normaalkuju, siis on see saavutatav normaaljärjekorraga.

Reduktsiooni järjekorrad

- Normaalkorrad võivad olla ebaefektiivsed!
- Normalkorrad:

$$\begin{aligned}
 \underline{(\lambda x. x x) ((\lambda x. x) (\lambda x. x))} &\rightarrow_{\beta} \underline{((\lambda x. x) (\lambda x. x)) ((\lambda x. x) (\lambda x. x))} \\
 &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) ((\lambda x. x) (\lambda x. x))} \\
 &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) (\lambda x. x)} \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda x. x
 \end{aligned}$$

- Aplikatiivne korrad:

$$\begin{aligned}
 (\lambda x. x x) \underline{((\lambda x. x) (\lambda x. x))} &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x x) (\lambda x. x)} \\
 &\rightarrow_{\beta} \underline{(\lambda x. x) (\lambda x. x)} \\
 &\rightarrow_{\beta} \lambda x. x
 \end{aligned}$$

- Laisk väärtustamine = normaalkorrad + graafireduktsioon