Märkmed Feynmani parametriseeringu ja deltafunktsiooni kohta

Kristjan Kannike

27. jaanuar 2007. a.

Feynmani parametriseering on viis kirjutada lahti murd, mille nimetajas on korrutis:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_m} = (m-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_m \frac{\delta(1 - u_1 - \ldots - u_m)}{[A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_m u_m]^m}, \tag{1}$$

mille mõtles välja Richard Feynman, et arvutada silmusintegraale.

1 Deltafunktsioon ja integreerimisrajad

Feynman parametriseeringus on meil mitmekordne määratud integraal kujul

$$\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_m \delta(1 - u_1 - \ldots - u_m) f(u_1, \ldots, u_m). \tag{2}$$

Integreerides üle u_m, annab deltafunktsioon funktsioonis f muutujale u_m väärtuse $1 - u_1 - \ldots - u_{m-1}$, kuid mitte ainult seda. Deltafunktsioon sõltub Feynmani parameetritest $u_1, \ldots, u_{m-1}$. Kui deltafunktsiooni piik peaks langema integreerimisintervallist $[0, 1]$ välja, on integraal üle u_m null; muul juhul on see üks.[1] Seda väljendab

$$\int_0^1 du_m \delta(1 - u_1 - \ldots - u_m) = \theta(1 - u_1 - \ldots - u_{m-1}))\theta(u_1 + \ldots + u_{m-1}). \tag{3}$$

Teine ühikaste on samaväärne võrratusega

$$0 \leq u_1 + \ldots + u_{m-1}, \tag{4}$$

mis on järgmistes integreerimistes automaatselt rahuldatud. Esimene ühikaste ütleb, et

$$u_1 + \ldots + u_{m-1} \leq 1, \tag{5}$$

[1] Pange tähele, et selleks peab integraal üle deltafunktsiooni võrduma ühega isegi siis, kui deltafunktsiooni argument langeb kokku ühe integreerimisrajaga. (Mõnel juhul on sel juhul mugavam defineerida deltafunktsiooni väärtuseks 1/2.) Sama käib ühikastme kohta.

mis sisuliselt seab järgmise integraali (üle u_{m-1}) ülemiseks rajaks $1 - u_1 - \ldots - u_{m-2}$, ja nõnda edasi.

Näiteks

$$\begin{aligned}&\int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^1 du_3 \delta(1-u_1-u_2-u_3) f(u_1,u_2,u_3) = \\ &= \int_0^1 du_1 \int_0^{1-u_1} du_2 f(u_1,u_2,1-u_1-u_2).\end{aligned} \tag{6}$$

2 Üks Feynmani parametriseeringu vorm

Üks Feynmani parametriseeringu vorm on

$$\begin{aligned}&\frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_m} = \\ &(m-1)! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_{m-1} \\ &\frac{u_1^{m-2} \ldots u_{m-2}}{[A_m u_1 \ldots u_{m-1} + A_{m-1} u_1 \ldots u_{m-2}(1-u_{m-1}) + \ldots + A_1(1-u_1)]^m}\end{aligned} \tag{7}$$

mida võib olla lihtsam integreerida kui tavalist vormi, kuna kõik integreerimisrajad on samad.

Tõestada on (7) lihtne induktsiooni abil. Kui nimetajas on kaks tegurit, on parametriseering

$$\begin{aligned}&(2-1)! \int_0^1 du \frac{1}{[Bu + A(1-u)]^2} \\ &= \int_0^1 du \frac{1}{[(B-A)u + A]^2} \\ &= -\frac{1}{B-A}\left[\frac{1}{(B-A)+A} - \frac{1}{A}\right] \\ &= \frac{1}{A-B}\left[\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right] \\ &= \frac{1}{AB}.\end{aligned} \tag{8}$$

Eeldades (7), kui nimetajas on m tegurit, peame me näitama, et $m+1$ teguri korral saame peale üle u_m integreerimist $1/A_{m+1}$ korda (7).

Meil on

$$\begin{aligned}&m! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_m \\ &\frac{u_1^{m-1} \ldots u_{m-1}}{[A_{m+1} u_1 \ldots u_m + A_m u_1 \ldots u_{m-1}(1-u_m) + \ldots + A_1(1-u_1)]^{m+1}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Integreerimismuutuja u_m esineb ainult kahes esimeses summa liikmes. Teisiti kirjutades

$$
\begin{aligned}
& m! \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_m \\
& \frac{u_1^{m-1} \ldots u_{m-1}}{[(A_{m+1} - A_m)u_1 \ldots u_m + A_m u_1 \ldots u_{m-1} + \ldots + A_1(1-u_1)]^{m+1}} \\
& = -\frac{m!}{m} \frac{1}{A_{m+1} - A_m} \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_{m-1} \frac{u_1^{m-1} \ldots u_{m-1}}{u_1 \ldots u_{m-1}} \\
& \big\{ [(A_{m+1} - A_m)u_1 \ldots u_{m-1} + A_m u_1 \ldots u_{m-1} + \ldots + A_1(1-u_1)]^{-m} \\
& -[A_m u_1 \ldots u_{m-1} + \ldots + A_1(1-u_1)]^{-m} \big\} \\
& = (m-1)! \frac{1}{A_m - A_{m+1}} \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \ldots \int_0^1 du_{m-1} u_1^{m-2} \ldots u_{m-2} \\
& \big\{ [A_{m+1} u_1 \ldots u_{m-1} + A_{m-1} u_1 \ldots (1-u_{m-1}) + \ldots + A_1(1-u_1)]^{-m} \\
& -[A_m u_1 \ldots u_{m-1} + A_{m-1} u_1 \ldots (1-u_{m-1}) + \ldots + A_1(1-u_1)]^{-m} \big\} \\
& = \frac{1}{A_m - A_{m+1}} \left(\frac{1}{A_{m+1} A_{m-1} \ldots A_1} - \frac{1}{A_m A_{m-1} \ldots A_1} \right) \\
& = \frac{1}{A_{m-1} \ldots A_1} \frac{1}{A_m - A_{m+1}} \left(\frac{1}{A_{m+1}} - \frac{1}{A_m} \right) \\
& = \frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_m},
\end{aligned} \tag{10}
$$

kus oleme integraalid võtnud (7) abiga.