Predikaatloogika ülesanded

Helger Lipmaa

March 7, 1995

Definitsioon. Olgu M — mittetühi hulk ja $P(x_1, \ldots, x_n)$ hulgal M defineeritud predikaat. Valem $\mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n)$ **väljendab** predikaati P, kui suvaliste $m_1, \ldots, m_n \in M$ korral kehtib

$$\mathrm{A}(m_1, \ldots, m_n) = \mathbf{t} \Leftrightarrow P(m_1, \ldots, m_n) = \mathbf{t}$$

1. $M = \mathrm{N}$, $\sigma = \langle 0, 1\ ;\ +, \cdot\ ;\ = \rangle$. Väljendada predikaadid:
    1. $x = 2$,
    2. $y = 4x + 3$,
    3. $z = x - y$,
    4. $z = x/y$,
    5. $u = x - y/z$,
    6. $x \leq y$,
    7. $x < y$,
    8. x on paarisarv,
    9. x on paaritu,
    10. x jagub y-ga $(y|x)$,
    11. z on x/y täisosa,
    12. z on jääk x jagamisel y-ga,
    13. x on täisruut,
    14. x on algarv,
    15. x on y ja z suurim ühistegur $(x = \gcd(y, z))$,
    16. x on y ja z väikseim ühiskordne $(x = \mathrm{lcm}(y, z))$,
    17. x on arvu 2 aste,
    18. $x^y = z$.

2. $M = (R)$, $\sigma = \langle 0, 1\ ;\ +, \cdot\ ;\ = \rangle$. Väljendada predikaadid:

   1. $x \geq 0$,
   2. $x \leq y$,
   3. $x < y$,
   4. $x \in \mathrm{N}$.

3. $M = \mathcal{P}(\mathrm{N}), \sigma = \langle\ ;\ \ ;\ =, \subseteq \rangle$. Väljendada predikaadid:

   1. $X = \emptyset$,
   2. $X = \mathrm{N}$,
   3. $X \cup Y = Z$,
   4. $X \cap Y = Z$,
   5. $X \cup (Y \cap Y) = Z$,
   6. $X \cap Y = \emptyset$,
   7. $X' = Z$,
   8. $X \setminus Y = Z$,
   9. $|X| = 1$,
   10. $|X| = 2$.

4. $M = \mathcal{P}(\mathrm{N}), \sigma = \langle\ ;\ \cup, \cap\ ;\ = \rangle$. Väljendada predikaadid:

   1. $X = \emptyset$,
   2. $X = \mathrm{N}$,
   3. $X \subseteq Y$,
   4. $X' = Y$,
   5. $X \setminus Y = Z$.

   Analoogiliselt hulgal M defineeritud predikaatidele saab valemitega väljendada ka hulga M alamhulkade, hulgal M defineeritud seoste, hulgal M defineeritud funktsioonide jms. kohta käivaid väiteid.

5. Olgu fikseeritud hulk M ja olgu $A, B, C \subseteq M$, $D \subseteq M \times M$. Tähistagu $A(x)$, $B(x)$ ja $C(x)$ vastavalt $x \in A$, $x \in B$ ja $x \in C$, $D(x, y)$ aga $(x, y) \in D$. Signatuur koosnegu predikaatsümbolitest A, B, C, D ja võrdusmärgist. Väljendada:

   1. $A = B$,
   2. $A \subseteq B$,

3. $A \subset B$,
4. $A \cup B = C$,
5. $A \cap B = C$,
6. $A \setminus B = C$,
7. $A' = B$,
8. $A = \emptyset$,
9. $A = M$,
10. $A \cap B = \emptyset$,
11. $|A| = 1$,
12. $|A| = 2$,
13. $A \times B \subseteq D$,
14. $D \subseteq A \times B$,
15. $A \times B = D$.

6. Olgu fikseeritud hulk M ja olgu R hulgal M defineeritud binaarne seos. Signatuur koosnegu kahekohalisest predikaatsümbolist R ja võrdusmärgist. Väljendada:

   1. R on refleksiivne,
   2. R on sümmeetriline,
   3. R on transitiivne,
   4. R on ekvivalentsisiseos,
   5. R on antisümmeetriline,
   6. R on mitterange järjestusseos,
   7. R on irrefleksiivne,
   8. R on range järjestusseos.

7. Olgu R hulgal M defineeritud ekvivalentsiseos, $A \subseteq M$. Kasutades sümboleid ülesannete 5 ja 6 signatuuridest, väljendada:

   1. A on elemendi x ekvivalentsiklass R järgi,
   2. A on ekvivalentsiklass (R järgi),
   3. kui x ja y on seoses R, siis nende ekvivalentsiklassid ühtivad,
   4. x ja y ei ole seoses R, siis nende ekvivalentsiklassid ei lõiku.

8. Tähistagu $R(x, y)$, et kehtib $x\, R\, y$, kus R on mitterange järjestusseos hulgal M. Väljendada:

1. x ja y on mittevõrreldavad R mõttes ($x \asymp y$),
2. R on lineaarne järjestus,
3. x on suurim element järjestuse R mõttes,
4. x on maksimaalne element R mõttes,
5. R on tihe järjestus,
6. x on hulga A ülemine tõke,
7. x on hulga A supreemum,
8. x on hulga A infiimum.

9. Väljendada eelmise ülesande väited kui R on *range* järjestusseos.

10. Olgu $A, B \subseteq M$, $f : M \to M$, $\sigma = \langle\ ;\ f\ ;\ A, B, = \rangle$. Väljendada:

    1. f väärtuste piirkond on B ($\operatorname{Im} f = B$),
    2. $f(A) \subseteq B$,
    3. $f(A) = B$,
    4. f on üksühene,
    5. f kujutab hulga A üksüheselt hulgale B.

11. Olgu $M = \mathrm{R}$, $\sigma = \langle 0\ ;\ +, f\ ;\ =, < \rangle$, kus f on ühekohaline funktsionaalsümbol. Väljendada:

    1. $y = -x$,
    2. f on paarisfunktsioon,
    3. f on paaritu funktsioon,
    4. f on perioodiline funktsioon,
    5. f on kasvav funktsioon,
    6. f on monotoonselt kasvav funktsioon,
    7. f on ülalt tõkestatud,
    8. f on tõkestatud,
    9. f on pidev punktis x,
    10. f on vasakult (paremalt) pidev punktis x.
    11. f on pidev lõigul $[a, b]$ (vahemikus (a, b)),
    12. f on ühtlaselt pidev lõigul $[a, b]$,
    13. M on funktsiooni f maksimaalne väärtus lõigul $[a, b]$,

14. M on funktsiooni f supreemum lõigus $[a, b]$.

12. Olgu M — mingi hulk, $A, B \subseteq M$, $f : A \to B$, $\sigma = \langle 0, 1\ ;\ f, +, \cdot\ ;\ = \rangle$, kus '$+$' ja '$\cdot$' on binaarsed seosed hulgal M. Väljendada:

    1. M on poolrühm,
    2. M on monoid,
    3. M on rühm,
    4. M on Abeli rühm,
    5. f on poolrühmade homomorfism,
    6. M on korpus ja A on M alamkorpus ($A \leq M$),
    7. f on korpuste homomorfism (eeldada, et A ja B on korpused).
    8. A ja B on isomorfsed (sama eeldus).