Algebra II
10. praktikumi ülesanded.
Jordani normaalkuju. Bilineaarsed funktsionaalid.

1. Leida maatriksi $A = \begin{pmatrix} 16 & 9 & -9 & -18 \\ -2 & 11 & -1 & 6 \\ -2 & 9 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ Jordani normaalkuju J ja maatriks C nii, et $J = C^{-1}AC$.

2. Leida ülimalt 2. astme polünoomide vektorruumi $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{Q})$ lineaarteisenduse $T(p) = 2p' - 2p$ kanooniline baas.

3. Tõestada, et kui $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ karakteristlik polünoom lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis A ja A^T on sarnased maatriksid.

4. Tõestada, et kui K on algebraliselt kinnine korpus, siis maatriksi $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ kõik omaväärtused on võrdsed nulliga parajasti siis, kui A on nilpotentne maatriks. Kas väide jääb kehtima, kui K ei ole algebraliselt kinnine?

5. Millised järgmistest avaldistest on K^3 bilineaarvormid:
1) 1, 2) $(x_1 + y_2)^2 - (x_2 - y_1)^2$, 3) $(x_1 + y_2)^2 - (x_1 - y_2)^2 + 3x_3y_3$, 4) $x_1y_2 - 3x_2y_3$?
Leida bilineaarvormide maatriksid baasi $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ suhtes.

6. Olgu $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Tõestada, et $f(A, B) := n\mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ on V bilineaarne funktsionaal. Kas f on sümmeetriline funktsionaal?

7. Olgu f bilineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel vektorruumil V, kusjuures mistahes $0 \neq v \in V$ korral leidub $w \in V$ nii, et $f(v, w) \neq 0$. Tõestada, et iga $g^* \in V^*$ jaoks leidub $v \in V$ nii, et $g^*(w) = f(v, w)$ kõigi $w \in V$ korral.

8. Tõestada, et vektorruumi V sümmeetriliste ja kaldsümmeetriliste bilineaarsete funktsionaalide hulgad S ja K on V alamruumid. Millal kehtib $V = S \dot{+} K$?

9. Tõestada, et kui $\mathrm{char}(K) = 0$ või $\mathrm{char}(K) > n$, siis $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on nilpotentne parajasti siis, kui $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ iga $0 < k \leq n$ korral.

10*. Tõestada, et kui $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on diagonaliseeritavad ja $AB = BA$, siis leidub $C \in \mathrm{Mat}_n(K)$ nii, et CAC^{-1} ja CBC^{-1} on mõlemad diagonaalmaatriksid. Kas väide kehtib ka juhul, kui $AB \neq BA$?