

## Algebra II

## 11. praktikumi ülesanded.

## Ruutfunktsionaalid ja ruutvormid.

1. Tõestada, et  $\varphi$  on bilineaarne funktsionaal vektorruumil  $V$  ja leida selle maatriks baasi  $B$  suhtes, kui

1)  $V = \mathbb{E}_3$ ,  $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})\vec{x}\vec{y}$  (segakorrutis),  $B = \{\vec{i} - \vec{j}, \vec{k}, \vec{j}\}$ ;

2)  $V = \mathbb{R}_2[x]$ ,  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$ ,  $B = \{1, (x-1), (x-1)^2\}$ ;

3)  $V = \langle 1, x, e^x \rangle \subseteq C[-1, 2]$ ,  $\varphi(f, g) = f(0)g(1)$ ,  $B = \{1 + x, 1 + e^x, x\}$ .

2. Leida ruutvormi  $4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$  kanooniline kuju üle  $\mathbb{R}$  ja üks muutujavahetus, mis viib sellele kujule.

3. Viia ruutvorm  $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$  normaalkujule üle  $\mathbb{R}$  ja  $\mathbb{C}$ .

4. Leida ruutvormide  $f = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ ,  $g = 10y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2$  ja  $h = z_1^2 - z_2^2$  jaoks muutujavahetus, mis viib ühe neist teiseks.

5. Leida kõik  $a$  ja  $b$  väärtused, kus ruutvorm  $x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$  on positiivselt ning  $-x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - b^2x_2x_3$  negatiivselt määratud.

6. Leida ruutvormide  $f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$  ja  $g = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$  kanoonilised kujud, mis on saavutatavad ortogonaalse muutujavahetusega. Ruutvormi  $f$  korral teha seda ilma muutujavahetust ennast leidmata, ruutvormi  $g$  jaoks leida ka see muutujavahetus.

7. Kui palju on erinevaid ruutvormide ekvivalentsiklasse  $n$ -mõõtmelisel vektorruumil

1) üle  $\mathbb{C}$ , 2) üle  $\mathbb{R}$ ?

8. Tõestada, et kui kahest ruutvormist vähemalt üks on positiivselt määratud, siis saab need ruutvormid viia kanoonilisele kujule sama muutujavahetusega.

9. Leida ruutvormide  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$  ja  $g = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  jaoks muutujavahetus, mis viib nad samaaegselt kanoonilisele kujule.

10. Olgu  $f(x_1, \dots, x_n)$  ja  $g(x_1, \dots, x_n)$  ruutvormid, kusjuures  $g$  on positiivselt määratud. Tõestada, et kanooniline kuju  $f = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$  on iga muutujavahetuse korral, mis viib  $g$  normaalkujule, määratud üheselt liidetavate järjekorra täpsuseni, kusjuures  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  on nn  $\lambda$ -võrrandi  $\det(A - \lambda B) = 0$  lahendid, kus  $A$  ja  $B$  on vormide  $f$  ja  $g$  maatriksid.

11. Leida ruutvormi  $f = 14x_1^2 - 4x_2^2 + 17x_3^2 + 8x_1x_2 - 40x_1x_3 - 26x_2x_3$  kanooniline kuju, mis saadakse ruutvormi  $g = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$  normaalkujule viiva muutujavahetuse abil, seda muutujavahetust ennast välja arvutamata.

12\*. Graafile  $G = (T, S)$  vastav ruutvorm on kujul  $\sum_{i \in T} x_i^2 - \sum_{\substack{(i,j) \in S \\ i < j}} x_i x_j$  (näiteks graafile

• — • vastav ruutvorm on  $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ ). Graaf  $T(a, b, c)$  on  $T$ -tähe kujuline  $a + b + c + 1$  tipu ja  $a + b + c$  servaga graaf. Leida, milliste  $a, b, c \in \mathbb{N}$  korral on graafile  $T(a, b, c)$  vastav ruutfunktsionaal positiivselt (negatiivselt) määratud.