

Algebra II

12. praktikumi ülesanded.

Tsüklilised rühmad.

1. Leida tsüklilise rühma $\langle g \rangle$ järk, kui $g \in G$, kus
 - 1) $G = (\mathbb{Z}_{42}, +)$ ja $g \in \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$; 2) $G = \mathbb{C}$ ja $g \in \{\frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1+i\}$.
2. Leida kõik 12-elementilise tsüklilise rühma alamrühmad.
3. Leida kõik surjektiivsed homomorfismid k -elementilisest tsüklilisest rühmast l -elementilisse tsüklilisse rühma.
4. Olgu $G = \langle g \rangle$, $|G| = 12$. Leida $G/\langle g^k \rangle$, kus $k = 6, 7, 8$.
5. Tõestada, et n . järku tsüklilise rühma mistahes alamrühm on tsükliline ja iga $d \mid n$ korral leidub täpselt üks d . järku alamrühm.
6. Tõestada, et lõpmatu rühm on tsükliline parajasti siis, kui ta on isomorfne kõigi oma mittetriviaalsete alamrühmadega.
7. Tõestada, et iga lõplik tsükliline rühm on isomorfne sellise lõplike tsükliliste rühmade otsekorrutisega, milles iga teguri järk on mingi algarvu aste. (Vihje: kui Abeli rühmas $\text{ord}(g) = n \cdot m$, $\text{SÜT}(n, m) = 1$, siis $\langle g \rangle \cong \langle i \rangle \times \langle j \rangle$, kus $\text{ord}(i) = m$ ja $\text{ord}(j) = n$).
8. Leida kõik 15. järku rühmad. Tõestuseta võib kasutada Cauchy teoreemi: kui $p \mid |G|$ ja $p \in \mathbb{P}$, siis rühmas G leidub p . järku element.
- 9*. Olgu A lõplik Abeli rühm, milles võrrandil $nx = 0$ on ülimalt n lahendit mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõestada ilma loengukonspekti teoreemi 5.27 kasutamata, et A on tsükliline rühm.