Kevad 2019

Algebra II
2. praktikumi ülesanded.
Faktorrühmad. Faktorringid.

1. Leida kõik sümmeetrilise rühma S_3 vasakpoolsed kõrvalklassid alamrühma $H := \langle(1,2)\rangle$ järgi. Kas H on S_3 normaaljagaja?

2. Tõestada, et rühma G *tsenter* $C(G) = \{c \in G \mid cx = xc \ \forall x \in G\}$ on selle rühma normaaljagaja.

3. Näidata, et Lagrange'i teoreem ei kehti "tagurpidi", st kui G on n. järku rühm ja $k \mid n$, siis rühmas G ei pea olema k. järku alamrühmi.

4. Leida faktorrühma $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/\langle(2,0)\rangle$ korrutustabel. Kas see meenutab mõne tuntud rühma oma?

5. Olgu N rühma G normaaljagaja ja $g \in G$ lõplikku järku element. Tõestada, et $\overline{g}$ järk faktorrühmas G/N on g järgu jagaja.

6. Leida ringi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ kõik ideaalid.

7. Tõestada, et I on kommutatiivse ühikuga ringi R maksimaalne ideaal parajasti siis, kui faktorring R/N on korpus. Ideaali I maksimaalsus tähendab seda, et $I \neq R$ ja ei leidu ühtegi teist ideaali J nii, et $I \subsetneq J \subsetneq R$.

8. Mitu erinevat faktorringi on kommutatiivsel korpusel?

9. Leida Gaussi täisarvude ringi $G = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ faktorring peaideaali $\langle 3\rangle$ järgi.

10. Olgu I kommutatiivse ringi R ideaal. Tõestada, et faktorring R/I on igal juhul kommutatiivne ja omab ühikelementi parajasti siis, kui leidub element $e \in R$ selliselt, et $er - r \in I$ iga $r \in R$ korral.

11*. Kas ring, milles kehtib samasus $x^3 = x$, on kommutatiivne?