Kevad 2019

Algebra II
3. praktikumi ülesanded.
Homomorfismid ja isomorfismid.

1. Leida kõik rühma $(\mathbb{Z}, +)$ endomorfismid.

2. Tõestada, et rühm $(\mathbb{Q}, +)$ ei ole isomorfne rühmaga $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

3. Olgu $f : G \to G'$ rühmade homomorfism. Tõestada, et $f(G)$ on Abeli rühm parajasti siis, kui $xyx^{-1}y^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ iga $x, y \in G$ korral.

4. Olgu A lõplik Abeli rühm ja $n \in \mathbb{N}$ selline, et $\text{SÜT}(|A|, n) = 1$. Tõestada, et iga $a \in A$ avaldub kujul $a = x^n$, $x \in A$.

5. Leida kõik ringide homomorfismid $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.

6. Tõestada, et ühikuga ring R on esitatav korrutisena $R = R_1 \times R_2$, kus R_1 ja R_2 on vähemalt kaheelemendilised ringid, siis ja ainult siis, kui leidub $e = e^2 \in R \setminus \{0, 1\}$.

7. Kas korpused $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ja $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ on isomorfsed? Miks?

8. Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle korpuse K. Defineerida tehted hulgal

$$\operatorname{Hom}(V_1, V_2) = \{f : V_1 \to V_2 \mid f \text{ on lineaarkujutus}\}.$$

nii, et tulemuseks oleks samuti vektorruum üle K.

9. Koostada vektorruumi $\mathbb{R}^3$ lineaarteisendus, mille tuum sisaldab elementi $(1, 2, 3)$ ja on selle omaduse suhtes minimaalne (st sisaldub igas tuumas, mis sisaldab elementi $(1, 2, 3)$).

10. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi iga sürjektiivne lineaarteisendus on selle vektorruumi automorfism. Kas sama väide kehtib ka lõpmatumõõtmelise ruumi korral?

11*. Tõestada, et iga vähemalt kolmeelemendiline lõplik rühm omab automorfismi, mis ei ole samasusteisendus. Kas sama väide kehtib ka lõpmatute rühmade korral?