Algebra II
4. praktikumi ülesanded.
Otsekorrutised ja otsesummad.

1. Olgu B Abeli rühma A alamrühm. Tõestada, et selline alamrühm $C \leq A$, et $A = B \dot{+} C$, leidub parajasti siis, kui saab leida niisuguse homomorfismi $f : A \to B$, et $f(x) = x$ iga $x \in B$ korral.

2. Esitugu Abeli rühm A otsesummana $A = B \dot{+} C$. Tõestada, et iga homomorfism $B \to A$ on laiendatav rühma A endomorfismiks. Kas iga injektiivne homomorfism on laiendatav automorfismiks?

3. Tõestada, et lõpliku arvu moodustajatega Abeli rühm, mille iga element $g \neq 1$ on p. järku, $p \in \mathbb{P}$, on isomorfne lõpliku otsesummaga $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p$.

4. Olgu K korpus, mille karakteristika ei ole 2. Tõestada, et $\mathrm{Mat}_n(K)$ on n. järku sümmeetriliste ja kaldsümmeetriliste maatriksite alamruumide otsesumma.

5. Olgu R kommutatiivne ring, I, I_1 ja I_2 selle ideaalid. Tõestada, et kui $I = I_1 \dot{+} I_2$, siis $I_1 I_2 = 0$.

6. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring, M R-moodul ning M_1, M_2 ja N selle alammoodulid. Kehtigu $M = M_1 \oplus M_2$. Tõestada või lükata ümber: $N = N_1 \oplus N_2$, kus $N_i \leq M_j$ (siin ei pea tingimata kehtima $i = j$).

7. Tõestada, et kui U on lõplikumõõtmelise vektorruumi V alamruum, siis leidub teine alamruum W nii, et $V = U \dot{+} W$.

8. Tõestada, et $\mathbb{C}$ kui vektorruumi üle iseenda *loenduv* väline otsesumma $\oplus \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$ ei ole isomorfne otsekorrutisega $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}$.

9. Olgu vektorruum V oma lõplikumõõtmeliste alamruumide U ja W summa $V = U + W$. Tõestada, et $V = U \dot{+} W$ parajasti siis, kui

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W).$$

10. Olgu U ja W vektorruumi V alamruumid. Tõestada, et $\left(U \dot{+} W\right) / W \cong U$.

11*. Olgu $P_i : V \to V$ lõplikumõõtmelise vektorruumi V projektorid, kus $i = 1, \ldots, n$. *Projektor* on lineaarteisendus, mille korral $P^2 = P$. Tõestada, et kui $P_i P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral, siis $V = \mathrm{Im}(P_1) \dot{+} \ldots \dot{+} \mathrm{Im}(P_n) \dot{+} \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i)$.

Näidata, et kehtib ka "vastupidine", st kui $\sum\limits_{i=1}^{n} P_i = 1_V$, siis $P_i P_j = 0$ iga $i \neq j$ korral ja $V = \mathrm{Im}(P_1) \dot{+} \ldots \dot{+} \mathrm{Im}(P_n)$.