Algebra II
5. praktikumi ülesanded.
Mitme muutuja polünoomid.

1. Jagada polünoom $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$ jäägiga polünoomide paariga $g_1 = xy^2 - x$, $g_2 = x - y^3$. Jäägiga jagamine tähendab selliste polünoomide q_1, q_2 ja r leidmist, et

$$f = q_1g_1 + q_2g_2 + r,$$

kus kas $r = 0$ või r on üksliikmete "lineaarkombinatsioon" ja g_i pealiikmed ei jaga ühtegi neist üksliikmetest.

2. Lahendada uuesti eelmine ülesanne:
1) vahetades ära g_1 ja g_2 järjekorra;
2) kasutades "pealiikme" definitsioonis leksikograafilise asemel "kõrgeima astme leksikograafilist" järjestust, nt $y^2z < x^3 < y^2z^2 < xy^3$.

3. Tõestada, et kui R on kommutatiivne ühikuga ring, siis

$$R[x_1, \ldots, x_k][x_{k+1}, \ldots, x_n] \cong R[x_1, \ldots, x_n].$$

4. Olgu $n \in \mathbb{N}$, R ja S kommutatiivsed ühikuga ringid, $s_1, \ldots, s_n \in S$ ning $f : R \to S$ ringide homomorfism. Tõestada, et $\mathrm{eval} : R[x_1, \ldots, x_n] \to S$ on ringide homomorfism, kui $\mathrm{eval}(p) = f(p)(s_1, \ldots, s_n)$. Siin $f(p) \in S[x_1, \ldots, x_n]$ on polünoom, mille kordajateks on vastavate p kordajate f-kujutised.

5. Kas eelmine väide jääb kehtima, kui ringid R ja S ei ole ühikuga ringid? Kommutatiivsed ringid?

6. Olgu R kommutatiivne ring, $r \in R$ ja $p \in R[x_1, \ldots, x_n]$, kusjuures $p(x_1, \ldots, x_{n-1}, r) = 0 \in R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$. Tõestada, et leidub niisugune $q \in R[x_1, \ldots, x_n]$, et $p = (x_n - r)q$.

Edasises on $\sigma_k = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ n muutuja sümmeetrilised põhipolünoomid.

7. Avaldada $\sigma_k(x, y, z, w)$ kaudu polünoom $(xy + zw)(xz + yw)(xw + yz)$.

8. Avaldada $\sigma_k(x, y, z)$ kaudu $\frac{(x-y)^2}{x+y} + \frac{(y-z)^2}{y+z} + \frac{(z-x)^2}{z+x}$.

9. Näidata, et suvaliste $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ korral $c_1 = \ldots = c_n$ alati, kui kehtib

$$\sigma_k(c_1, \ldots, c_n) = \sigma_k(c_k \ldots, c_k)\ \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

10*. Tõestada, et iga $k = 1, \ldots, n$ ja $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ korral

$$\sqrt[k]{\sigma_k(\overline{x} + \overline{y})} \geq \sqrt[k]{\sigma_k(\overline{x})} + \sqrt[k]{\sigma_k(\overline{y})}.$$