Kevad 2019

Algebra II
8. praktikumi ülesanded.
Polünoomi lahutuskorpus.

Edasises on kõik korpused kommutatiivsed.
Kui $K \leq L$ on korpused, siis öeldakse, et L on korpuse K *laiend*. Laiendi *astmeks* loetakse L kui K-vektorruumi mõõdet $[L : K] = \dim({}_K L)$.

1. Olgu L polünoomi $f \in K[x]$ lahutuskorpus üle K ja $\deg(f) = n$. Näidata, et $[L : K] \mid n!$. Tõestuseta võib eeldada õpiku "Algebra I" lause 7.3.1 kehtivust koos lisajäreldusega $[K_p : K] = \deg(p)$.

2. Leida polünoomi $x^4 + x^2 + 1$ lahutuskorpus üle $\mathbb{Q}$.

3. Leida polünoomi $x^4 + 1$ lahutuskorpus üle $\mathbb{Z}_3$.

4. Leida polünoomi $x^3 - 2$ lahutuskorpuse aste üle $\mathbb{Q}$.

5. Tõestada, et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ on algebraline üle $\mathbb{Q}$, konstueerides 4. astme polünoomi üle $\mathbb{Q}$, mille juureks ta on.

6. Tõestada, et $\mathbb{C}$ alamkorpus $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \langle \mathbb{Q} \cup \{\sqrt[3]{2}\} \rangle$, st vähim $\mathbb{C}$ alamkorpus, mis sisaldab korpust $\mathbb{Q}$ ja arvu $\sqrt[3]{2}$, ei ole ühegi polünoomi lahutuskorpus.

Algebralise elemendi $a \in L$ *minimaalne polünoom* üle K on vähima astmega polünoom $0 \neq p(x) \in K[x]$, mille pealiige on 1 ja $p(a) = 0$.

7. Tõestada, et algebralise elemendi minimaalne polünoom on taandumatu.

8. Leida $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ja $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ minimaalsete polünoomide astmed.

9. Leida $\sqrt{2} + i$ minimaalne polünoom 1) üle $\mathbb{R}$; 2) üle $\mathbb{Q}$.

10*. Tõestada, et polünoomi $x^n - 1$, $n > 1$, lahutuskorpus üle $\mathbb{Q}$ on korpuse $\mathbb{Q}$ $\varphi(n)$. järku laiend (φ on Euleri φ-funktsioon).