Kevad 2019

Algebra II
9. praktikumi ülesanded.
Maatriksi Jordani normaalkuju.

1. Diagonaliseerida maatriks või põhjendada, miks see ei ole võimalik:

a) $\begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 20 & 16 & -2 \\ 25 & 14 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 15 & -3 & 5 \\ 7 & 7 & 11 \\ 14 & -16 & -12 \end{pmatrix}$.

2. Leida maatriksi $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 33 & 3 & -3 & 9 & 6 & 27 \\ 14 & 26 & 10 & -6 & 68 & -14 \\ -18 & 6 & 30 & 90 & -12 & 18 \\ -4 & -4 & 4 & 48 & 8 & 4 \\ 7 & -11 & 11 & -21 & 82 & -7 \\ 3 & -3 & 3 & -9 & 18 & 57 \end{pmatrix}$ Jordani normaalkuju.

3. Leida ülimalt 2. astme polünoomide vektorruumi $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{Q})$ lineaarteisenduse $T(p) = 2p' - 2p$ kanooniline baas.

4. Leida $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 9 \\ 1 & -20 & -22 \\ -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}^{2018}$.

5. Olgu $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ selline, et $A^2 = A$. Leida A Jordani normaalkuju.

6. Tuua näide kahest mittesarnasest vähemalt 5. järku ruutmaatriksist, millel on üks ja sama karakteristlik polünoom.

7. Tõestada, et kui $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ karakteristlik polünoom lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis A ja A^T on sarnased maatriksid.

8. Tõestada, et kui K on algebraliselt kinnine korpus, siis maatriksi $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ kõik omaväärtused on võrdsed nulliga parajasti siis, kui A on nilpotentne maatriks. Kas väide jääb kehtima, kui K ei ole algebraliselt kinnine?

9. Tõestada, et kui $\mathrm{char}(K) = 0$ või $\mathrm{char}(K) > n$, siis $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on nilpotentne parajasti siis, kui $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ iga $0 < k \leq n$ korral.

10*. Tõestada, et kui K on *lõpmatu* korpus, L tema laiend, $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on sarnased ringis $\mathrm{Mat}_n(L)$, siis A ja B on sarnased juba ringis $\mathrm{Mat}_n(K)$.