Algebra I 11. praktikumi ülesanded: lineaarkujutuse maatriks, tuum ja kujutis

1. Olgu $\mathbb{E}_3$ ruumi vabavektorite vektorruum. Teha kindlaks, millised teisendustest $\varphi : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ on lineaarteisendused ja leida viimaste maatriksid ristbaasi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ suhtes:
   a) $\varphi(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}$, $k \in \mathbb{R}$; b) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$, kus $\vec{a} \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud vektor;
   c) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{x}$, kus $\vec{a} \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud vektor;
   d) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$, kus $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

2. Olgu $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ ülimalt n. järku polünoomide vektorruum. Teha kindlaks, millised teisendustest $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ on lineaarteisendused ja leida viimaste maatriksid baasi $1, x, x^2, \ldots, x^n$ suhtes, kui iga $f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ korral
   a) $\varphi(f(x)) = f(ax + b)$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ on fikseeritud; b) $\varphi(f(x)) = xf(x)$;
   c) $\varphi(f(x)) = f(x+1) - f(x)$; d) $\varphi(f(x)) = f'(x)$, nn. *diferentseerimisteisendus.*

3. Leida diferentseerimisteisneduse maatriks järgnevate baaside suhtes:
   a) $x^n, \ldots, x^2, x, 1$; b) $1, x-1, \frac{x-1}{2}, \ldots, \frac{(x-1)^n}{n!}$.

4. Konstrueerida vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ kaks erinevat lineaarteisendust, mis langevad kokku diferentseerimisteisendusega alamruumil $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

5. Kas lineaarteisendus viib alati lineaarselt sõltuva süsteemi lineaarselt sõltuvaks süsteemiks ja lineaarselt sõltumatu süsteemi lineaarselt sõltumatuks süsteemiks?

6. Olgu $\varphi : V_1 \to V_2$ lineaarkujutus ja L_1, L_2 vektorruumi L_1 alamruumid. Kas kehtivad võrdused $\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1) + \varphi(L_2)$ ja $\varphi(L_1 \cap L_2) = \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$?

7. Tõestada, et n-mõõtmelise vektorruumi lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi $a_1, \ldots, a_n$ ja suvalise vektorite süsteemi $b_1, \ldots, b_n$ korral leidub üheselt määratud lineaarteisendus, mis viib vektori a_i vektoriks b_i iga $i = 1, \ldots, n$ jaoks.

8. Tõestada, et leidub täpselt üks lineaarteisendus, mis viib vektorid $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,2)$ vastavalt vektoreiks $(1,1,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ ning leida selle teisenduse maatriks baasi $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ suhtes.

9. Teha kindlaks, millised vektorruumi $\mathbb{R}^3$ teisendused φ on lineaarteisendused, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ korral a) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;
   b) $\varphi(x) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$; c) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.

10. Vaatleme vektorruumis $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ baasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Leida selle baasi suhtes järgmiste vektorruumi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ lineaarteisenduste maatriksid:
   a) transponeerimisteisendus, st $\varphi(X) = X^t$;
   b) teisendus ψ_A, mis on defineeritud võrdusega $\psi_A(X) = XA$, kus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;
   c) teisendus $\chi_{A,B}$, kui $\chi_{A,B}(X) = AXB$, kus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$;
   d) teisendus $\kappa_{A,B}$, kui $\kappa_{A,B}(X) = AX + XB$, kus $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Algebra I 11. praktikumi ülesanded: lineaarkujutuse maatriks, tuum ja kujutis

11. Lineaarteisenduse maatriks baasi $e_1 = (1,2), e_2 = (1,1)$ suhtes on $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Leida selle teisenduse maatriks baasi $e_1' = (2,3), e_2' = (0,1)$ suhtes.

12. Vektorruumi $\mathbb{R}_2[x]$ lineaarteisenduse φ maatriks baasi $1, x, x^2$ suhtes on $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Leida φ maatriks baasi $3x^2 + 2x, 5x^2 + 3x + 1, 7x^2 + 5x + 3$ suhtes.

13. Vektorruumi $\mathbb{R}^2$ lineaarteisenduse φ maatriks baasi $e_1 = (1,2)$, $e_2 = (2,3)$ suhtes on $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ja lineaarteisenduse ψ maatriks baasi $e_1' = (3,1)$, $e_2' = (4,2)$ suhtes on $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Leida teisenduse $\varphi + \psi$ maatriks baasi e_1', e_2' suhtes.

14. Tõestada, et diferentseerimisteisendus on

a) mittepööratav vektorruumil $\mathbb{R}_n[x]$;

b) pööratav vektorruumil $\{k \sin x + l \cos x | k, l \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

15. Tõestada, et kui vähemalt üks maatriksitest A ja B on regulaarne, siis AB ja BA on sarnased. Tuua näide singulaarsetest maatriksitest A ja B, mille korral AB ja BA ei ole sarnased.

16. Tõestada, et kui maatriksid $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ on sarnased, siis on sarnased ka maatriksid 1) A^2 ja B^2; 2) A^k ja B^k, $k \in \mathbb{N}$; $f(A)$ ja $f(B)$, kus $f \in K[x]$.

17. Leida lineaarkujutise $\varphi : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$ tuum ja kujutis, kui

a) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle, a \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud vektor;

b) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}, \vec{a} \in \mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ on fikseeritud vektor;

c) $\varphi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b}), \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_3 \setminus \{0\}$ on fikseeritud vektor.

18. Leida vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ diferentseerimisteisenduse kujutis ja tuum.

19. Leida $\mathbb{R}^3$ lineaarteisenduse φ tuuma ja kujutise baas, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3)$ korral

a) $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;

b) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

20. Vaatleme vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ vaheteisendust $\varphi_h, \varphi_h(f(x)) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$, kus $h \neq 0$ on fikseeritud arv. Leida selle teisenduse tuum ja kujutis.

21. Leida lineaarteisenduse φ tuuma ja kujutise baas, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

22. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus, L vektorruumi V alamruum ja kehtigu võrdus $L \cap \mathrm{Ker}\varphi = 0$. Tõestada, et φ viib L iga lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi lineaarselt sõltumatuks vektorite süsteemiks.

23*. (1 nädal, 1 punkt) Tõestada, et vektorruumi V mistahes lineaarteisenduste φ, ψ, χ korral kehtib *Frobeniuse võrratus*: $\mathrm{rank}\, \psi\varphi + \mathrm{rank}\, \varphi\chi \leq \mathrm{rank}\, \varphi + \mathrm{rank}\, \psi\varphi\chi$.