Algebra I 11. praktikumi vastused ja näpunäited: lineaarkujutuse maatriks, tuum ja kujutis

1. Olgu $e = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) φ on lineaarteisendus ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$;

b) φ üldiselt ei ole lineaarteisendus, va juht $\vec{a} = \vec{0}$, siis $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) φ üldiselt ei ole lineaarteisendus, va juht $\vec{a} = \vec{0}$, siis $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

d) φ on lineaarteisendus ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Olgu $e = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$.
a) φ on lineaarteisendus ja $A_\varphi^e = (a_{ij})$, kus $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1} a^{i-1} b^{j+1-i}$;
b) φ ei ole üldse kujutus;
c) φ on lineaarteisendus ja $A_\varphi^e = (a_{ij})$, kus $a_{ij} = C_j^{i-1}$;
d) φ on lineaarteisendus ja $A_\varphi^e = (a_{ij})$, kus $a_{ij} = \delta_{i+1,j} \cdot i$ ja δ_{ij} on Kroneckeri delta.

3. Tähistame mõlemat baasi sümboliga e.
a) $A_\varphi^e = (a_{ij})$, kus $a_{ij} = \delta_{i,n-j} \cdot i$;
b) $A_\varphi^e = (a_{ij})$, kus $a_{ij} = \delta_{i+1,j}$.

4. a) Sobivad näiteks diferentseerimisteisendus D ja teisendus φ, mis on defineeritud võrdusega $\varphi(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = a_0x^n + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$.

5. Lineaarteisendus viib alati lineaarselt sõltuva süsteemi lineaarselt sõltuvaks süsteemiks, aga ei pruugi viia lineaarselt sõltumatut süsteemi lineaarselt sõltumatuks süsteemiks.

6. Esimene võrdus kehtib, teine üldiselt ei kehti. Viimase fakti tõestamiseks sobivad $\mathbb{R}^3$ alamruumid $L_1 = \{(a, b, 0) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ ja $L_2 = \{(0, c, d) \,|\, c, d \in \mathbb{R}\}$ ning kujutus φ, kus $\varphi(a, b, c) = (0, 0, a + c)$.

7. Tuleb tähele panna, et $a_1, \ldots, a_n$ on baas.

8. Vt eelmine ülesanne. Teisenduse maatriks baasil (e_1, e_2, e_3) on $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. a) φ on lineaarteisendus; b), c) φ ei ole lineaarteisendus.

10. Olgu $e = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

a) $A_\varphi^e = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; b) $A_\varphi^e = \begin{pmatrix}a & c & 0 & 0\\ b & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & c\\ 0 & 0 & b & d\end{pmatrix}$; c) $A_\varphi^e = \begin{pmatrix}ae & ag & be & bg\\ af & ah & ef & dh\\ ce & cg & de & dg\\ cf & ch & df & dh\end{pmatrix}$;

d) $A_\varphi^e = \begin{pmatrix}a+e & g & b & 0\\ f & a+h & 0 & b\\ c & 0 & d+e & g\\ 0 & c & f & d+h\end{pmatrix}$.

11. Lineaarteisenduse maatriks baasil (e_1', e_2') on $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

12. Lineaarteisenduse φ maatriks baasil $(3x^2+2x, 5x^2+3x+1, 7x^2+5x+3)$ on $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ -15 & -16 & -20\\ 9 & 12 & 16\end{pmatrix}$.

13. Lineaarteisenduse $\varphi + \psi$ maatriks baasil (e_1', e_2') on $\begin{pmatrix}44 & 44\\ -29,5 & -25\end{pmatrix}$.

14. Näpunäited: a) D ei ole injektiivne ruumil $\mathbb{R}_n[X]$; b) $D^{-1} = -D$.

15. Näpunäited: kui $|A| \neq 0$, siis $A^{-1}(AB)A = BA$; $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ei ole sarnased, sest sarnaste maatriksite astakud peavad olema võrdsed.

16. Näpunäide: $(C^{-1}AC)^k = C^{-1}A^kC$.

17.
a) $\operatorname{Ker}\varphi$ on tasand normaaliga $\vec{a}$, st kõik vektoriga $\vec{a}$ ristuvad vabavektorid, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi = \langle\vec{a}\rangle$, st kõik vektoriga $\vec{a}$ paralleelesed vabavektorid, $\operatorname{Im}\varphi$ on tasand normaaliga $\vec{a}$, st kõik vektoriga $\vec{a}$ ristuvad vabavektorid.

18. $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\operatorname{Im} D = \{a_0 | \, a_0 \in \mathbb{R}\}$, st kõik konstantsed polünoomid.

19.
a) $\operatorname{Ker}\varphi$ baasiks sobib $((0,1,-1),(1,0,-1))$, $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta $(1,1,1)$;
b) $\operatorname{Ker}\varphi$ baasiks sobib $(1,1,1)$, $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta $((0,1,-1),(1,0,1))$.

20. $\operatorname{Ker}\varphi_h = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\operatorname{Im}\varphi_h = \{a_0 | \, a_0 \in \mathbb{R}\}$, st kõik konstantsed polünoomid.

21. Olgu see mingi baas (e_1, e_2, e_3, e_4).

a) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ baasi ei ole, $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta $(e_1 + e_2, e_1 + 2e_2)$;

b) $\operatorname{Ker}\varphi$ baasiks sobib $2e_1 - e_2$, $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta $e_1 + 3e_2$;

c) $\operatorname{Ker}\varphi$ baasiks sobib (e_2, e_3), $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta $(e_1 + 2e_3 + e_4, e_3 + e_4)$;

d) $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ baasi ei ole, $\operatorname{Im}\varphi$ baasiks võib võtta (e_1, e_2, e_3).

22. Näpunäide: olgu $(v_1, \ldots, v_n)$ lineaarselt sõltumatu vektorsüsteem ja oletame, et mingite $k_1, \ldots, k_n$ korral $\sum_{i=1}^{n} k_i\varphi(v_i) = 0$. Siis saab ära kasutada asjaolu, et

$\sum_{i=1}^{n} k_i v_i \in L \cap \operatorname{Ker}\varphi$.