Algebra I 12. praktikumi ülesanded: lineaarteisenduste omaväärtused ja omavektorid

1. Leida transponeerimisteisenduse ($X \mapsto X^t$) omaväärtused ja omavektorid.

2. Leida vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ diferentseerimisteisenduse omaväärtused ja omavektorid.

3. Leida maatriksi $A^t A$ omaväärtused, kui $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Mat}_{1,n}(\mathbb{R})$.

4. Leida vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse φ omavektorid ja omaväärtused, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Leida vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{Z}_p$ lineaarteisenduse φ omavektorid ja omaväärtused, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; p=2,3 b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; p=3,5 c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p = 2, 3$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $p = 2, 3$.

6. Kas maatriksid

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

on sarnased diagonaalmaatriksiga?

7. Teha kindlaks, millised järgmistest vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse maatriksitest saab viia diagonaalkujule uuele baasile ülemineku teel. Leida selline baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Tõestada, et kolmnurkmaatriksi (sh. diagonaalmaatriksi) omaväärtused on selle diagonaali elemendid.

Algebra I 12. praktikumi ülesanded: lineaarteisenduste omaväärtused ja omavektorid

9. Tõestada, et lineaarteisendusel $\varphi - k \cdot 1_V$, kus $k \in K$, on samad omavektorid, kui vektorruumi V (üle K) lineaarteisendusel φ. Leida seose nende lineaarteisenduste omaväärtuste vahel.

10. Olgu φ vektorruumi V (üle K) lineaaarteisendus. Tõestada, et φ omavektorid on ka lineaarteisenduste $f(\varphi), f \in K[x]$ omavektorid. Leida vastavad omaväärtused. Kas iga teisenduse $f(\varphi), f \in K[x]$ omavektor on ka φ omavektor?

11. Tõestada, et kui φ on pööratav lineaarteisendus, siis on teisendustel φ ja φ^{-1} samad omavektorid. Leida seos omaväärtuste vahel.

12. Tõestada, et vektorruumi V (üle K) kõik nullist erinevad vektorid on omavektorid parajasti siis, kui iga $a \in V$ korral $\varphi(a) = ka$, kus $k \in K$ on fikseeritud skalaar.

13. Olgu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n-mõõtmelise kompleksse vektorruumi lineaarteisenduse φ omaväärtused. Leida φ kui vastava $2n$-mõõtmelise reaalarvulise vektorruumi lineaarteisenduse omaväärtused.

14. Tõestada, et lineaarteisenduse tuum koosneb nullvektorist ja omaväärtusele 0 vastavatest omavektoritest. Järeldada, et lineaarteisendus on pööratav parajasti siis, kui 0 ei ole tema omaväärtus.

15. Tõestada, et lineaarteisenduse nullist erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid kuuluvad selle lineaarteisenduse kujutisse.

16. Tõestada, et maatriksi A omaväärtuste summa ja korrutis on vastavalt võrdsed A jälje ja determinandiga.

17. Tõestada, et kui λ^2 on vektorruumi V (üle K) lineaarteisenduse $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ omaväärtus, siis üks korpuse K elementidest λ ja $-\lambda$ on teisenduse φ omaväärtus.

18. Tõestada, et lineaarteisenduse maatriks mingi baasi suhtes on diagonaalmaatriks parajasti siis, kui see baas koosneb selle lineaarteisenduse omavektoreist.

19. Tõestada, et lineaarselt sõltumatute omavektorite arv, mis vastavad lineaarteisenduse φ omaväärtusele λ, ei ületa λ kui φ karakteristliku polünoomi juure kordsust.

20. Kas leidub paarituarvulise mõõtmega vektorruumi (üle $\mathbb{R}$) lineaarteisendus, millel ei ole omavektoreid?

21. Olgu λ_0 lineaarteisenduse φ omaväärtus. Tõestada, et omaväärtusele λ_0 vastavate lineaarselt sõltumatute omavektorite arv (ehk λ_0 *geomeetriline kordsus*) ei ületa λ_0 kui φ karakteristliku polünoomi juure kordsust (ehk λ_0 *algebralist kordsust*).

22*. (1 nädal, 1 punkt) Tõestada, et vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) mistahes (sh. lõputu) paarikaupa kommuteeruvate lineaarteisenduste hulga jaoks leidub
a) ühine omavektor;
b) baas, mille suhtes kõigi nende teisenduste maatriksid on ülemised kolmnurkmaatriksid.