Algebra I 12. praktikumi vastused ja näpunäited: lineaarteisenduste omaväärtused ja omavektorid

1. Omaväärtusteks on 1, millele vastavad omavektorid on nullmaatriksist erinevad sümmeetrilised maatriksid, ja -1, millele vastavad omavektorid on nullmaatriksist erinevad kaldsümmeetrilised maatriksid.

2. Omaväärtuseks on 0, millele vastavad omavektorid on nullist erinevad konstantsed polünoomid.

3. Sellel maatriksil on $(n-1)$-kordne omaväärtus 0 ja ühekordne omaväärtus $\sum\limits_{i+1}^{n} a_i^2$.

4. Lahendame ülesande üle korpuse $\mathbb{C}$. Et saada vastus üle $\mathbb{Q}$ või $\mathbb{R}$, tuleb lihtsalt välja jätta need omaväärtused (ja neile vastavad omavektorid), mis ei vastavalt korpusesse $\mathbb{Q}$ või $\mathbb{R}$. Olgu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ see baas, mille suhtes lineaarteisenduse φ maatriks antud on, seejuures $n = 2, 3, 4$ vastavalt alamülesandele. Siis lineaarteisendusel φ on

a) kahekordne omaväärtus -1, millele vastavad omavektorid $ce_1 + ce_2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

b) ühekordne omaväärtus $\sqrt{2}$, millele vastavad omavektorid $c\sqrt{2}e_1 + 2ce_2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus $-\sqrt{2}$, millele vastavad omavektorid $c\sqrt{2}e_1 - 2ce_2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

c) ühekordne omaväärtus -1, millele vastavad omavektorid $ce_1 + 3ce_2 + 5ce_3$,
$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus 1, millele vastavad omavektorid $ce_1 + ce_2 + ce_3$,
$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid $ce_1 + ce_3$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

d) kahekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid
$(c + 2d)e_1 + de_2 + ce_3$, $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus -5, millele vastavad omavektorid
$ce_1 + 3ce_2 + 2ce_3$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

e) kahekordne omaväärtus -1, millele vastavad omavektorid $ce_1 + ce_2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus $2 + \sqrt{3}i$, millele vastavad omavektorid
$c(-5 - \sqrt{3}i)e_1 + c(-5 + \sqrt{3}i)e_2 + c(-3 - 3\sqrt{3}i)e_3 + 6ce_4$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
ühekordne omaväärtus $2 - \sqrt{3}i$, millele vastavad omavektorid
$c(-5 + \sqrt{3}i)e_1 + c(-5 - \sqrt{3}i)e_2 + c(-3 + 3\sqrt{3}i)e_3 + 6ce_4$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

f) kahekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid $ce_2 + de_3$, $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
kahekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid ce_4, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. Olgu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ see baas, mille suhtes lineaarteisenduse φ maatriks antud on, seejuures $n = 2, 3, 4$ vastavalt alamülesandele. Siis lineaarteisendusel φ on juhul

a) $p = 2$ kahekordne omaväärtus 0, millele vastab omavektor $e_1 - e_2$,
$p = 3$ ühekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid $e_1 - e_2, 2e_1 - 2e_2$,
ja ühekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid $e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2$;

b) $p=3$ mitte ühtegi omaväärtust ega omavektorit,
$p=5$ ühekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid $2ce_1-ce_2$, $c\in\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}$, ja ühekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid $2ce_1+ce_2$, $c\in\mathbb{Z}_5\setminus\{0\}$;
c) $p=2$ kahekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid $e_1+e_2, e_1+e_3, e_2+e_3$ ja ühekordne omaväärtus 1, millele vastab omavektor $e_1+e_2+e_3$,
$p=3$ kolmekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid $(c+d)e_1-ce_2-de_3$, $c,d\in\mathbb{Z}_3\setminus\{0\}$;
d) $p=2$ neljakordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid e_2+e_4, $e_1+e_2+e_3, e_1+e_3+e_4$,
$p=3$ kahekordne omaväärtus 0, millele vastavad omavektorid ce_2+de_3, $c,d\in\mathbb{Z}_3\setminus\{0\}$, ja kahekordne omaväärtus 2, millele vastavad omavektorid $e_4, 2e_4$.

6. Antud maatriks a) ei ole; b) on; c) on sarnane diagonaalmaatriksiga.

7. Lahendame ülesande üle korpuse $\mathbb{C}$. Et saada vastus üle $\mathbb{Q}$ või $\mathbb{R}$, tuleb välja jätta juhud, kus omaväärtused ei ole ratsionaal- või reaalarvud. Olgu $\{e_1,\dots,e_n\}$ see baas, mille suhtes lineaarteisenduse φ maatriks antud on, seejuures $n=2,3,4$ vastavalt alamülesandele.
a) Maatriks on diagonaliseeritav kujule $\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}$ baasil e_1+e_2, e_1-4e_2;
b) Maatriks ei ole diagonaliseeritav (sest tal on kahekordne omaväärtus 0 geomeetrilise kordsusega 1);
c) Maatriks on diagonaliseeritav kujule $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ baasil $-2e_1+e_2+2e_3$, $-8e_1+3e_2+7e_3, -3e_1+e_2+3e_3$;
d) Maatriks on diagonaliseeritav kujule $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2+3i&0\\0&0&2-3i\end{pmatrix}$ baasil $e_1+e_2+2e_3$, $(15-15i)e_1+20e_2+(25-15i)e_3, (15+15i)e_1+20e_2+(25+15i)e_3$;
e) Maatriks ei ole diagonaliseeritav (sest tal on kahekordne omaväärtus 0 geomeetrilise kordsusega 1);
f) Maatriks on diagonaliseeritav kujule $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$ baasil e_1+e_2, e_1+e_3, $e_1+e_4, e_2+e_3+2e_4$.

9. Kui λ on φ omaväärtus, siis $\lambda-k$ on $\varphi-k\cdot 1_V$ omaväärtus.

10. Kui λ on φ omaväärtus, siis $f(\lambda)$ on $f(\varphi)$ omaväärtus. Iga $f(\varphi)$ omavektor ei pea alati olema φ omavektor, näiteks $\mathbb{R}^2$ teisenduse φ, $\varphi(x,y)=(x+y,-x-y)$ korral $\varphi^2=0$ ja iga nullist erinev vektor on φ^2 omavektor, aga φ omavektorid on kujul $(c,-c)$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

11. Kui λ on pööratava lineaarteisenduse φ omaväärtus, siis $\lambda \neq 0$ ja $\frac{1}{\lambda}$ on φ^{-1} omaväärtus.

14. Ei kehti lõpmatumõõtmelistes ruumides. Lõplikumõõtmelistes ruumides on lihtne veenduda, et 0 ei ole φ omaväärtus parajasti siis, kui $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Kuna $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$, siis $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ parajasti siis, kui $\operatorname{Im}\varphi = V$, ehk kui φ on pööratav.

16. Näpunäide: Viéte'i valemid.

17. Näpunäide: vaadelda avaldist $\varphi(\varphi(x) - \lambda x)$, kus x on omaväärtusele λ vastav omavektor.

19. Näpunäide: oletada vastuväiteliselt, et selliste lineaarselt sõltumatute omavektorite arv ületab omaväärtuse kui juure kordsust, valida üks komplekt selliseid omavektoreid ja täiendada need terve ruumi baasiks ning leida sealt uuesti φ maatriks ja karakteristlik polünoom.

20. Ei leidu, sest paarituarvulise astmega polünoomid üle $\mathbb{R}$ omavad alati vähemalt ühte reaalarvulist juurt.