Algebra I 13. praktikumi ülesanded: Eukleidiline ruum ja ortogonaalne täiend.

1. Leida skalaarkorrutis $\langle a, b\rangle$, kui a ja b on antud koordinaatidega ortonormeeritud baasi suhtes:

a) $a = (1, 2, 1, -1), b = (-2, 1, 1, 1)$; b) $a = (1, 1, 1, 1), b = (1, 1, 3, -5)$.

2. Olgu $a = (1, 0, i)$, $b = (1, 1 - i, 1 + i)$, $c = (2 - i, 1, 3 + 4i)$. Leida nende vektorite pikkused ja skalaarkorrutised $\langle a, b\rangle$, $\langle a, c\rangle$, $\langle b, c\rangle$.

3. Leida kolmnurga abc külgede pikkused ja sisenurgad eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^5$, kui
a) $a = (2, 4, 2, 4, 2)$, $b = (6, 4, 4, 4, 6)$, $c = (5, 7, 5, 7, 2)$;
b) $a = (1, 2, 3, 2, 1)$, $b = (3, 4, 0, 4, 3)$,
$c = (1 + \frac{5}{26}\sqrt{78}, 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78}, 3 + \frac{10}{13}\sqrt{78}, 2 + \frac{5}{13}\sqrt{78}, 1 + \frac{5}{26}\sqrt{78})$.

4. Tõestada, et vektorruumi $C_{[-\pi,\pi]}$ trigonomeetriliste funktsioonide süsteemi 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\ldots$, $\cos nx$, $\sin nx$, $\ldots$ suvalised kaks vektorit on ortogonaalsed skalaarkorrutise $\langle f(x), g(x)\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ suhtes.

5. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektorruumi $\mathbb{R}^2$ suvalised vektorid. Näidata, et sellel vektorruumil võib skalaarkorrutamise defineerida võrdusega

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$; b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

Arvutada mõlemal juhul vektorite $x = (1, 1)$ ja $y = (-3, 2)$ skalaarkorrutis.

6. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektorruumi $\mathbb{R}^2$ suvalised vektorid. Tõestada, et valemiga

$$\langle x, y\rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$$

on defineeritud skalaarkorrutis vektorruumil $\mathbb{R}^2$ parajasti siis, kui $a > 0$ ja $ac > b^2$.

7. Defineerida vektorruumil $\mathbb{R}_n[x]$ skalaarkorrutis nii, et baas $1, x, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}$ oleks ortonormeeritud.

8. Tõestada, et n-mõõtmelise eukleidilise ruumi nullist erinevate vektorite ortogonaalne süsteem $a_1, \ldots, a_n$ on lineaarselt sõltumatu.

9. Tõestada, et kui eukleidilise ruumi vektor on ortogonaalne vektoritega $a_1, \ldots, a_m$, siis on ta ortogonaalne ka kõigi lineaarkombinatsioonidega $k_1a_1 + \ldots + k_ma_m$.

10. (Üldistatud Pythagorase teoreem) Tõestada, et kui eukleidilise ruumi vektorite süsteem $a_1, \ldots, a_m$ on ortogonaalne, siis

$$|a_1 + \ldots + a_m|^2 = |a_1|^2 + \ldots + |a_m|^2.$$

11. Veenduda, et vektorid $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ on ortogonaalsed ning täiendada süsteem a_1, a_2 ortogonaalseks baasiks:

a) $a_1 = (1, 1, 1, 2)$, $a_2 = (1, 2, 3, -3)$; b) $a_1 = (1, -2, 1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1)$.

12. Täiendada vektorite süsteem ortonormeeritud baasiks:

a) $a = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}), b = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; b) $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), b = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Algebra I 13. praktikumi ülesanded:
Eukleidiline ruum ja ortogonaalne täiend.

13. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, konstrueerida vektorite $a_1, \ldots, a_m$ lineaarkatte ortogonaalne baas:
  a) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$;
  b) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$, $a_4 = (6, 7, 7, 8)$.

14. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leida ortonormeeritud baas vektorruumis $\mathbb{R}_2[x]$, võttes esialgseks baasiks $1, x, x^2$ ja kasutades skalaarkorrutamist, mis on defineeritud võrdusega
  a) $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$;
  b) $\langle f(x), g(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, kui $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $g(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$.

15. Olgu vektorruumil $\mathbb{R}^4$ skalaarkorrutis defineeritud võrdusega
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + 2x_4y_4$$
mistahes $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ korral. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leida vektorruumi $\mathbb{R}^4$ ortonormeeritud baas, lähtudes baasist
  a) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$;
  b) $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, -1)$, $a_4 = (1, 0, 0, 1)$.

16. Eukleidilise ruumi E alamruumi *ortogonaalseks täiendiks* $L^\perp$ nimetatakse kõigi selliste E vektorite hulka, mis on ortogonaalsed kõigi L vektoritega. Tõestada, et
  a) $(L^\perp)^\perp = L$; b) $(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp$; c) $(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp$;
  d) $\{0\}^\perp = E$; e) $E^\perp = \{0\}$.

17. Leida ortogonaalse täiendi $L^\perp$ ortogonaalne baas, kui $L = \mathrm{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ ja
  a) $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $a_3 = (0, 1, -2, 1)$;
  b) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (-1, 1, -1, 1)$, $a_3 = (2, 0, 2, 0)$.

18. Olgu L eukleidilise ruumi E alamruum. Tõestada, et iga vektor $a \in E$ esitub üheselt summana $a = b + c$, kus $b \in L$ ja $c \in L^\perp$. Vektorit b nimetatakse vektori a *ortogonaalseks projektsiooniks* alamruumile L ja vektorit c nimetatakse vektori a *ortogonaalseks täiendiks* alamruumi L suhtes.

19. Leida vektori a ortogonaalne projektsioon ja ortogonaalne täiend, kui
  a) $a = (4, -1, -3, 4)$ ja $L = \mathrm{span}\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, -1), (1, 0, 0, 3)\}$;
  b) $a = (5, 2, -2, 2)$ ja $L = \mathrm{span}\{a_1 = (2, 1, 1, -1), a_2 = (1, 1, 3, 0), a_3 = (1, 2, 8, 1)\}$.

20. Olgu L neljamõõtmelise vektorruumi (üle $\mathbb{R}$) alamruum, mis on mingi ortonormeeritud baasi suhtes antud lineaarvõrrandisüsteemiga
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
Leida sama baasi suhtes lineaarvõrrandisüsteem, mis määrab $L^\perp$.

21*. (1 nädal, 1 punkt) Olgu E eukleidiline ruum. Leida, milliste elementide $x, y \in E$ korral kehtib võrdus
$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|.$$