

Algebra I 13. praktikumi vastused ja näpunäited:
eukleidiline ruum ja ortogonaalne täiend

1. Skalaarkorrutis on mõlemal juhul null, st vektorid a ja b on ortogonaalsed.

2. Skalaarkorrutised ja pikkused on järgmised:

$$\langle a, b \rangle = 2 + i, \langle a, c \rangle = 6 + 4i, \langle b, c \rangle = 10 - i, |a| = \sqrt{2}, |b| = \sqrt{5}, |c| = \sqrt{31}.$$

3. Külgede pikkused ja sisenurkade koosinused on:

$$\text{a) } |a| = \sqrt{44}, |b| = \sqrt{120}, |c| = \sqrt{152},$$

$$\cos \angle(a, b) = \frac{16}{\sqrt{330}}, \cos \angle(a, c) = \frac{20}{\sqrt{418}}, \cos \angle(b, c) = \frac{59}{\sqrt{4560}};$$

$$\text{b) } |a| = \sqrt{19}, |b| = \sqrt{50}, |c| = \sqrt{94 + \frac{110}{13}\sqrt{78}},$$

$$\cos \angle(a, b) = \frac{22}{\sqrt{950}}, \cos \angle(a, c) = \frac{19 + \frac{55}{13}\sqrt{78}}{\sqrt{19(94 + \frac{110}{13}\sqrt{78})}}, \cos \angle(b, c) = \frac{22 + \frac{55}{13}\sqrt{78}}{\sqrt{50(94 + \frac{110}{13}\sqrt{78})}}.$$

4. Näpunäide: siinuste ja koosinuste korrutise valemi abil saab näidata, et kõik funktsioonid, mida skalaarkorrutist leides integreeritakse, on paaritud funktsioonid.

5. Vektorite $(1, 1)$ ja $-3, 2$ skalaarkorrutis on a) -1; b) 0.

7. Võib võtta $\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^n (i!)^2 a_i b_i x^{n-i}$, kui $f = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ ja $g = \sum_{i=0}^n b_i x^{n-i}$.

11. Otsitav ortogonaalne baas on näiteks

$$\text{a) } (1, 1, 1, 2), (1, 2, 3, -3), (44, 65, 86, -17), (7, -5, 0, -1);$$

$$\text{b) } (1, -2, 1, 3), (2, 1, -3, 1), (1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, -1).$$

12. Baasiks täiendamiseks võib olemasolevatele vektoritele lisada näiteks

$$\text{a) } c = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$\text{b) } c = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

13. Vektorite a_1, a_2, a_3 ja a_4 lineaarkatte ortogonaalne baas on näiteks

$$\text{a) } (1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2);$$

$$\text{b) } (2, 1, 3, -1), (3, 2, -3, -1), (463, 1589, 342, 3541).$$

14. Saadav ortonormeeritud baas on a) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{45}(x^2 - \frac{1}{3})}{\sqrt{8}}$; b) $1, x, x^2$.

15. Selline \mathbb{R}^4 ortonormeeritud baas on

$$\text{a) } (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1);$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{70}}(4, 1, -5, 0), \frac{1}{\sqrt{105}}(5, 3, -1, -7), \frac{1}{\sqrt{30}}(10, 9, 7, 4).$$

17. Ortogonaalse täiendi L^\perp ortogonaalne baas on näiteks

a) $(0, 4, 1, -2)$, $(1, 1, 0, -1)$;

b) $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$.

19. Vektori a ortogonaalne

a) projektsioon on $(1, -1, -1, 5)$ ja täiend on $(3, 0, -2, -1)$;

b) projektsioon on $(3, 1, -1, -2)$ ja täiend on $(2, 1, -1, 4)$.

20. Selline lineaarvõrrandisüsteem on näiteks

$$\begin{cases} + x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + 9x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$