# Algebra I 14. praktikumi ülesanded: ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused ja maatriksid

1. *Ortogonaalseks* nimetatakse sellist maatriksit $A = (a_{ij})$, mille korral

$$AA^t = A^t A = E,$$

ehk $A^{-1} = A^t$. Tõestada, et maatriksi ortogonaalsuseks on tarvilik ja piisav kumbki tingimustest

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij},$$

kus $\delta_{ij}$ on Kroneckeri sümbol.

2. Leida, millised järgmistest maatriksitest on ortogonaalsed, ja arvutada viimaste determinandid:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$;

d) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; e) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

3. Tõestada, et ortogonaalmaatriksi determinant on kas 1 või $-1$. Kas kehtib ka vastupidine väide?

4. Tõestada, et eukleidilise ruumi ortogonaalteisenduste hulk on rühm teisenduste järjest rakendamise suhtes.

5. Tõestada, et kui eukleidilise ruumi kaks vektorit $a$ ja $b$ on sama pikkusega, siis leidub ortogonaalteisendus $\varphi$ selliselt, et $\varphi(a) = b$.

6. Tõestada, et kui eukleidilise ruumi vektorite paaride $a_1, a_2$ ja $b_1, b_2$ korral kehtivad võrdused $|a_1| = |b_1|$, $|a_2| = |b_2|$ ja $\angle(a_1, a_2) = \angle(b_1, b_2)$, siis leidub ortogonaalteisendus $\varphi$ selliselt, et $\varphi(a_1) = b_1$ ja $\varphi(a_2) = b_2$.

7. Olgu $\varphi$ eukleidilise ruumi $E$ ortogonaalteisendus. Ruumi $E$ alamruumi $L$ nimetatakse *$\varphi$-invariantseks*, kui $\varphi(x) \in L$ iga $x \in L$ korral. Tõestada, et $\varphi$-invariantse alamruumi $L$ ortogonaalne täiend $L^{\perp}$ on ka $\varphi$-invariantne.

8. Teha kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{R}_n[x]$ lineaarteisendused $\varphi(f(x)) = -f(x)$ ja $\phi(f(x)) = x^n f(\frac{1}{x})$ on ortogonaalteisendused, kui skalaarkorrutamine on defineeritud valemiga

$$\langle f(x), g(x) \rangle = a_n b_n + \ldots + +a_1 b_1 + a_0 b_0,$$

kui $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ja $g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$.

# Algebra I 14. praktikumi ülesanded: ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused ja maatriksid

9. Maatriksit $A$ nimetatakse *(kald)sümmeetriliseks*, kui $A^t = A$ ($A^t = -A$). Tõestada, et

a) regulaarse (kald)sümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on (kald)sümmeetriline;

b) iga maatriksi $B$ korral on maatriks $A = BB^t$ sümmeetriline;

c) (kald)sümmeetriliste maatriksite $A$ ja $B$ korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui $AB = BA$;

d) kaldsümmeetriliste maatriksite $A$ ja $B$ korrutis on kaldsümmeetriline parajasti siis, kui $AB = -BA$.

10. Tõestada, et sümmeetriliste teisenduste reaalarvuliste kordajatega lineaarkombinatsioonid on sümmeetrilised.

11. Tõestada, et kahe sümmeetrilise teisenduse $\varphi$ ja $\psi$ korrutis $\varphi\psi$ on sümmeetriline siis ja ainult siis, kui $\varphi$ ja $\psi$ kommuteeruvad, st $\varphi\psi = \psi\varphi$.

12. Leida lineaarteisenduse omavektoritest koosnev ortonormeeritud baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes, kui teisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13*. (1 nädal, 1 punkt) Eukleidilise ruumi lineaarteisendust $\psi$ nimetatakse *positiivselt määratuks*, kui $\langle \varphi(x), x \rangle > 0$ iga $x \neq 0$ korral. Olgu kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi lineaarteisenduse $\varphi$ maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes

$$\begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}.$$

Leida sama baasi suhtes sellise positiivselt määratud sümmeetrilise teisenduse $\psi$ maatriks, mille korral $\psi^2 = \varphi$.