Algebra I 14. praktikumi vastused ja näpunäited: ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused ja maatriksid

2. Ortogonaalsed on b), d) ja e). Determinandid on järjest 5, 1, -8, 1, 1.

3. Vastupidine väide ei kehti, sest $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

5. Vt. järgmist ülesannet.

6. Üldine juht on, kui a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltumatud. Siis täiendame nad baasiks $a_1, a_2, e_3, \ldots, e_n$ ja defineerime kujutuse $\varphi : E \to E$ valemiga

$$\varphi(x_1a_1 + x_2a_2 + \sum_{i=3}^{n} x_ie_i) = x_1b_1 + x_2b_2 + \sum_{i=3}^{n} x_ie_i.$$

Lisaks tuleb vaadelda juhtu, kui a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltuvad. Sellisel juhul on baasiks $a_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ ja kujutuse φ saab defineerida valemiga

$$\varphi(x_1a_1 + \sum_{i=2}^{n} x_ie_i) = x_1b_1 + \sum_{i=2}^{n} x_ie_i.$$

8. Mõlemad teisendused on ortogonaalteisendused.

11. Kui $\varphi\psi$, ψ ja φ on sümmeetrilised, siis

$$\langle(\varphi\psi)(x), (\psi\varphi)(x)\rangle = \langle x, (\varphi\psi)[(\psi\varphi)(x)]\rangle = \langle\varphi(x), \psi[(\psi\varphi)(x)]\rangle = \langle(\psi\varphi)(x), (\psi\varphi)(x)\rangle$$

ja analoogiliselt $\langle(\varphi\psi)(x), (\psi\varphi)(x)\rangle = \langle(\varphi\psi)(x), (\varphi\psi)(x)\rangle$ ning

$$|(\varphi\psi)(x) - (\psi\varphi)(x)|^2 = |(\varphi\psi)(x)|^2 - 2\langle(\varphi\psi)(x), (\psi\varphi)(x)\rangle + |(\psi\varphi)(x)|^2 = 0,$$

seega $(\varphi\psi)(x) - (\psi\varphi)(x) = 0$ ehk $\varphi\psi = \psi\varphi$.
Vastupidi, kui $\varphi\psi = \psi\varphi$ ja ψ ning φ on sümmeetrilised, siis

$$\langle(\varphi\psi)(x), y\rangle = \langle\psi(x), \varphi(y)\rangle = \langle x, (\psi\varphi)(y)\rangle = \langle x, (\varphi\psi)(y)\rangle.$$

12. Olgu see ortonormeeritud baas, mille suhtes lineaarteisenduse φ maatriks ülesandes antud on, $e_1, \ldots, e_n$, kus $n = 2, 3, 4$ vastavalt alamülesandele. Üks omavektoritest koosnev ortonormeeritud baas ja teisenduse maatriks sellel baasil on:

a) $e = \{\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $e = \{\frac{2}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}e_2, \frac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}e_2\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$;

c) $e = \{\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, e_2\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $e = \{\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

e) $e = \{\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2 + \frac{2}{3}e_3, \frac{2}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3, \frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}e_3\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$;

f) $e = \{\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3\}$ ja $A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $e = \{\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_4, \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_4,$

$\frac{1}{\sqrt{12}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{12}}e_2 - \frac{1}{\sqrt{12}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{12}}e_4\}$ ja

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$