# Algebra I 15. praktikumi ülesanded: funktsionaalid ja ruutvormid

1. Teha kindlaks, kas $\varphi$ on lineaarne funktsionaal vektorruumil $V$ üle korpuse $\mathbb{R}$, kui

a) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$, kus $V = \mathbb{R}^n$ ja $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ on fikseeritud;

b) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$, kus $V = \mathbb{E}_3$ ja $\vec{a}$ on fikseeritud vektor;

c) $\varphi(x_1, \ldots x_n) = 5x_2^3$, $V = \mathbb{R}^n$;

d) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a$, kus $V = \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}$ on fikseeritud;

e) $\varphi(f(x)) = \int\limits_a^b g(x)f(x)dx$, kus $V = C_{[a,b]}$ ja $g(x) \in C_{[a,b]}$ on fikseeritud.

2. Näidata, et kujutus $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ on sümmeetriline bilineaarne funktsionaal vektorruumil $V$, kui

a) $\varphi(x, y) = 0$, $V$ on suvaline;

b) $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, kus $V = \mathbb{E}_3$;

c) $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{a}\vec{x}\vec{y}$, $V = \mathbb{E}_3$ ja $a \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud;

d) $\varphi(f(x), g(x)) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, kus $V = C_{[a,b]}$;

e) $\varphi(f(x), g(x)) = f(x_0)g(x_0)$, kus $V = C_{[a,b]}$ ja $x_0 \in [a, b]$ on fikseeritud punkt;

f) $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, kus $V$ on suvaline ja $\varphi_1, \varphi_2$ fikseeritud lineaarsed funktsionaalid vektorruumil $V$.

3. Olgu $V$ vektorruum üle korpuse $K$ baasiga $e_1, \ldots, e_n$. Näidata, et kujutus $\varphi : V \times V \to K$, mis on defineeritud võrdusega $\varphi(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$, kus $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ ja $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ ning $a_{ij}$ on korpuse $K$ fikseeritud elemendid, on bilineaarne funktsionaal vektorruumil $V$. Millal on see funktsionaal sümmeetriline?

4. Tõestada, et kõigi bilineaarsete funktsionaalide hulk vektorruumil $V$ (üle $K$) on ise ka vektorruum üle $K$ liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes, mis on defineeritud võrdustega

$$(\varphi + \psi)(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y), \quad (k\varphi)(x, y) = k\varphi(x, y).$$

Leida selle vektorruumi baas ja mõõde, kui $\dim V = n$.

5. Kas kujutus $\varphi(x, y) = x_1 y_1^2$, kus $x_1, y_1$ on vektorite $x, y$ esimesed koordinaadid mingi baasi suhtes, on $n$-mõõtmelise vektorruumi $V$ bilineaarne funktsionaal?

# Algebra I 15. praktikumi ülesanded: funktsionaalid ja ruutvormid

6. Leida vektorruumi $\mathbb{E}_3$ bilineaarse funktsionaali $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{a}\vec{x}\vec{y}$ maatriks ristbaasi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ suhtes, kui $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

7. Näidata, et kujutus $\varphi : \mathrm{Mat}_n(K) \times \mathrm{Mat}_n(K) \to K$, $\varphi(A, B) = \mathrm{trace}(AB)$ on sümmeetriline funktsionaal vektorruumil $\mathrm{Mat}_n(K)$. Leida selle funktsionaali maatriks juhul $n = 2$ baasi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ suhtes.

8. Leida ruutvormi (üle $\mathbb{R}$) kanooniline kuju ja üks muutujavahetus, mis viib ruutvormi sellele kujule:

a) $x_1^2 + x_2x_3 + x_3x_4$;
b) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2$;
c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
d) $-x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

9. Viia ruutvorm normaalkujule üle $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$:

a) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
b) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$;
c) $x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3$;
d) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
f) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

10. Milliste parameetri $a$ väärtuste korral on järgmine ruutvorm positiivselt määratud:

a) $x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$;
b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_1x_2 + 2ax_2x_3$?
c) $2x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + (2a-1)x_1x_2 + a^2x_2x_3$;

11. Millised ruutvormid on omavahel ekvivalentsed:

a) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;
b) $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3$, $f_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3$, $f_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3$?

12. Leida ruutvormi (üle $\mathbb{R}$) kanooniline kuju ja ortogonaalne muutujavahetus, mis viib ruutvormi sellele kujule:

a) $2x_1x_2$;
b) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$;
c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
d) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2$;
e) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;
f) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
g) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

13. Kui palju on ruutvormide ekvivalentsiklasse $n$-mõõtmelisel vektorruumil $V$:
a) üle $\mathbb{C}$, b) üle $\mathbb{R}$?

14*. (1 nädal, 1 punkt) Tõestada, et kui kahe ruutvormi $f$ ja $g$ maatriksid kommuteeruvad, siis need ruutvormid võib viia kanoonilisele kujule sama ortogonaalse muutujavahetusega.