Algebra I 15. praktikumi vastused ja näpunäited: funktsionaalid ja ruutvormid

1. Igal juhul on lineaarsed funktsionaalid on a), b) ja e) ning d) on lineaarne funktsionaal parajasti siis, kui $a = 0$.

2. Variant e) ei ole sümmeetriline, teised on kõik sümmeetrilised bilineaarsed funktsionaalid.

3. Funktsionaal φ on sümmeetriline parajasti siis, kui $a_{ij} = a_{ji}$ iga $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

4. Selle vektorruumi mõõde on n^2 ja baasiks sobivad bilineaarsed funktsionaalid $\varphi_{kl} : V \times V \to K$, kus $\varphi_{kl}(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i) = x_k y_l$, kui kasutada eelnevalt fikseerinud baasi $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

5. See kujutus üldiselt ei ole bilineaarne funktsionaal, v.a. juht $K = \mathbb{Z}_2$.

6. Funktsionaali φ maatriks ristbaasil $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Funktsionaali φ maatriks antud baasil on $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Ruutvormi kanooniline kuju ning selleni viiv muutujavahetus on:

a) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ja $\begin{cases} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 - y_3 - y_4 \\ x_3 &= y_2 + y_3 \\ x_4 &= y_4 \end{cases}$;

b) $2y_1^2 + \frac{3}{2}y_2^2 - 5y_3^2$ ja $\begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{cases}$;

c) $y_1^2 - 8y_2^2 + 72y_3^2$ ja $\begin{cases} x_1 &= y_1 + 3y_2 + y_3 \\ x_2 &= y_2 - y_3 \\ x_3 &= 4y_3 \end{cases}$;

d) $-y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$ ja $\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{cases}$.

9. Ruutvormi normaalkuju üle $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$ on vastavalt:

a) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ ja $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$;

b), c), d) $z_1^2 - z_2^2$ ja $z_1^2 + z_2^2$;

e) $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ ja $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$;

f) $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ ja $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

10. Juhul b) on ruutvorm positiivselt määratud parajasti siis, kui $a \in (\frac{1}{2}, 1)$. Juhtudel a) ja c) ei ole kumbki ruutvorm mitte kunagi positiivselt määratud.

11. Üle $\mathbb{C}$ on mõlemal juhul kõik ruutvormid ekvivalentssed, üle $\mathbb{R}$ on ekvivalentsed a) f_1 ja f_3, b) f_2 ja f_3.

12. Ruutvormi kanooniline kuju ja selleni viiv ortogonaalne muutujavahetus on:

a) $-y_1^2 + y_2^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 & = & -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \end{array}\right.$;

b) $5y_2^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 \\ x_2 & = & \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 \end{array}\right.$;

c) $-\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_2 & = & -\frac{2}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{array}\right.$;

d) $4y_1^2 + 9y_2^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2 \\ x_2 & = & -\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2 \end{array}\right.$;

e) = c) ;

f) $3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ x_2 & = & \frac{2}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \end{array}\right.$;

g) $6y_1^2$ ja $\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_2 & = & \frac{2}{\sqrt{6}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 & = & -\frac{1}{\sqrt{6}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{array}\right.$.

13. Üle $\mathbb{C}$ on ruutvormide ekvivalentsiklasse $n+1$ tükki, üle $\mathbb{R}$ aga $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ tükki.