Algebra I 1. praktikumi ülesanded: ühe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid

1. Millistel arvuhulkadel on alltoodud tehe $*$ algebraline tehe? Tuua kaks näidet nii algebraliseks tehteks olemise kui mitteolemise kohta.

a) $a * b = a - b + 1$; c) $a * b = a + b - ab$; e) $a * b = a^2b^2$;
b) $a * b = \max(a, b)$; d) $a * b = \text{VÜK}(a, b)$; f) $a * b = \log_a b$.

2. Uurida järgmiste naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ defineeritud tehete $*$ omadusi, st teha kindlaks, kas $(N, *)$ on rühmoid, poolrühm, kas seal leidub ühikelement, millistel elementidel on pöördelemendid, kas $*$ on kommutatiivne.

a) $a * b = \min(a, b)$; c) $a * b = a^b$; e) $a * b = a$;
b) $a * b = 2$; d) $a * b = \text{SÜT}(a, b)$; f) $a * b = a + b - ab$.

3. Mitu binaarset tehet saab defineerida m-elemendilisel hulgal? Mitu neist tehetest on kommutatiivsed? Mitmel tehtel on olemas ühikelement? Mitu neist tehetest on idempotentsed, st $a * a = a$ iga elemendi a korral selles hulgas?

4. Näidata, et (mitteassotsiatiivses) ühikuga rühmoidis võib elemendil olla rohkem kui üks pöördelement. Konstrueerida minimaalne näide. Konstrueerida näide iga lõpliku hulga jaoks.

5. Positiivsete reaalarvude hulgal $\mathbb{R}^+$ on defineeritud kahekohaline tehe $*$ alljärgnevalt. Uurida seda tehet analoogiliselt ülesandega 2.

a) $a * b = ab$; c) $a * b = \frac{a}{b}$; e) $a * b = a^2$;
b) $a * b = \sqrt{ab}$; d) $a * b = 1$; f) $a * b = \frac{1}{b}$.

6. Olgu $X \neq \emptyset$ ja $\mathcal{P}(X)$ hulga X kõigi alamhulkade hulk. Uurida tehet $*$ analoogiliselt eelneva ülesandega.

a) $A * B = A \cup B$; b) $A * B = A \setminus B$; c) $A * B = X \setminus (A \cup B)$.

7. Olgu $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ja tehted

$$a \oplus b = a + b \mod n \qquad \text{ning} \qquad a \otimes b = ab \mod n.$$

Viimaseid nimetatakse *liitmiseks* ja *korrutamiseks mooduli n järgi*. Uurida neid tehteid analoogiliselt eelmise ülesandega. Koostada Cayley tabelid $n = 2, 3, 4, 5, 6$ jaoks.

8. Tõestada, et lõpliku poolrühma iga elemendi mingi aste on idempotent (elemendi x *idempotendiks* olek tähendab seda, et $x^2 = x$).

9. Leida idempotentide arv kolmeelemendilise hulga kõigi teisenduste monoidis.

10. Tõestada, et kui A on rühm, mille iga elemendi a korral $a^2 = 1$, siis A on kommutatiivne rühm (Abeli rühm).

Algebra I 1. praktikumi ülesanded: ühe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid

11. Uurida, millised järgmistest hulga $\mathbb{R}$ teisenduste hulkadest on (Abeli) rühmad teisenduste kompositsiooni suhtes:

a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a < 0\}$;
b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{Q}, a > 0\}$;
c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0\}$;
d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \, f(x) = 2^k x, k \in \mathbb{Z}\}$.

12. Uurida, millised järgmistest maatriksite hulkadest on (Abeli) rühmad maatriksite korrutamise suhtes:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} | \, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} | \, a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$;
c) $\left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} | \, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$;
d) selliste maatriksite $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ hulk, mille korral $S^T AS = A$, kus A on fikseeritud regulaarne sümmeetriline (kaldsümmeetriline) maatriks;
e) selliste maatriksite $S \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ hulk, mille korral $SA = AS$, kus A on fikseeritud maatriks;
f) ratsionaalarvuliste elementidega n. järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk 1) liitmise, 2) korrutamise suhtes;
g) täisarvuliste elementidega n. järku ruutmaatriksite, mille determinant on 1) 1, 2) ± 1, hulk korrutamise suhtes.

13. Uurida, millised järgmistest tehetest annavad (Abeli) rühma:

a) liitmine tasandi $\mathbb{E}_2$ selliste vektorite hulgal, mis on suunatud parempoolsesse pooltasandisse;
b) liitmine paaritute täisarvude hulgal;
c) selliste ratsionaalarvude, mille nimetajad on 2 mittenegatiivsed astmed, hulk liitmise suhtes;
d) vektorkorrutamine selliste ruumi $\mathbb{E}_3$ vektorite hulgal, mis on mingi ristbaasi suhtes täisarvuliste koordinaatidega;
e) ühisosa võtmine kõigi hulga X selliste alamhulkade hulgal, milles on paaritu arv elemente;
f) hulga X bijektiivsete teisenduste hulk $\mathcal{S}(X)$ teisenduste korrutamise suhtes;
g) teisenduste kompositsioon täisarvude hulga selliste teisenduste hulgal, mis ei jäta paigale vaid lõplikku hulka arve;
h) substitutsioonide kompositsioon hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ paarissubstitutsioonide hulgal;
i) tehe $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$ hulgal $\{(a, b) | \, a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0\}$.

14*. (1 nädal, 1 punkt) Olgu G lõplik rühm, milles on paarisarv elemente. Näidata, et vähemalt kahe rühma G elemendi g jaoks kehtib võrdus $g^2 = 1$.

Algebra I 2. praktikumi ülesanded: kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid

1. Millised järgmistest hulkadest on ringid tavalise arvude liitmise ja korrutamise suhtes? Kas nende hulgas on korpusi?

a) $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}, n \in \mathbb{N}$;

b) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

c) $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \mathrm{SÜT}(a,b) = 1, b|8\}$;

d) $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \mathrm{SÜT}(a,b) = 1, b \not| 7\}$.

2. Koostada ringide $\mathbb{Z}_4$ ja $\mathbb{Z}_5$ elementide liitmis- ja korrutustabelid. Leida nende ringide kõik pööratavad elemendid ja nulliteguri. Kas need ringid on korpused?

3. Tõestada, et hulk $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ on ring maatriksite liitmise ja järgneva korrutamistehte suhtes: $A \otimes B = AHB$, kus $H \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ on fikseeritud maatriks. Millist tingimust peab rahuldama maatriks H, et selles ringis oleks olemas ühikelement?

4. Tõestada, et hulk $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ on ring järgnevate liitmis- ja korrutamistehete suhtes:

$$A \oplus B = A + B - E,$$

$$A \otimes B = A + B - AB.$$

5. Tõestada, et maatriksid

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

üle $\mathbb{Z}_2$ moodustavad maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes korpuse. Koostada selle korpuse liitmise ja korrutamise Cayley tabelid.

6. Teha kindlaks, millised järgmistest hulkadest on ringid või korpused. Iga ühikelemendiga ringi korral, mis ei ole korpus, leida selle ringi pööratavate elementide hulk. Ülesannetes a)-f) on teheteks arvude tavaline liitmine ja korrutamine.

a) hulk $\mathbb{R}^+$;

b) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

c) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$;

d) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;

e) $\{a + bi \mid a, b \in 3\mathbb{Z}\}$;

f) kõigi ratsionaalarvude hulk, mis on kujul $\frac{m}{4}, m \in \mathbb{Z}$;

g) hulk $\mathbb{R}$ järgnevate tehete suhtes:

$a \oplus b = a + b - 1$,

$a \otimes b = a + b - ab$.

7. Tõestada, et järgmised funktsioonide hulgad $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kommutatiivsed ühikelemendiga ringid funktsioonide punktiviisilise liitmise ja korrutamise suhtes. Leida nende ringide pööratavad elemendid. Millistes neist ringidest leidub nullitegureid?

a) $C[0,1]$;

b) lõigul $[0,1]$ paarisfunktsioonide hulk;

c) lõigul $[0,1]$ diferentseeruvate funktsioonide hulk;

d) lõigul $[0,1]$ tõkestatud funktsioonide hulk.

Algebra I 2. praktikumi ülesanded: kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid

8. Tõestada, et järgmised maatriksite hulgad on ringid maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes. Teha kindlaks, millised neist on kommutatiivsed ja millised on korpused. Leida kõik pööratavad elemendid neis ringides, mis ei ole korpused. Leida kõik nulliteguridd nulliteguritega ringides.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 2\mathbb{Z} \right\}$;

c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;

d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;

e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;

f) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}$;

g) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$;

h) kõigi 2. järku ruutmaatriksite hulk üle $\mathbb{Q}$, mis kommuteeruvad maatriksiga $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Tõestada, et:
a) kui n on kordarv, siis ringis $\mathbb{Z}_n$ leidub nullitegureid;
b) $a \in \mathbb{Z}_n$ on pööratav parajasti siis, kui $S\ddot{U}T(a, n) = 1$;
c) $\mathbb{Z}_n$ on korpus parajasti siis, kui n on algarv.

10. Leida ringide $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{12}$ kõik pööratavad elemendid.

11. Tõestada, et maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_3)$ kõik astmed koos nullmaatriksiga moodustavad üheksaelemendilise korpuse.

12. Tõestada, et kui ringi kõik elemendid rahuldavad võrdust $x^2 = x$, siis see ring on kommutatiivne. Kas see väide kehtib ka tingimuse $x^3 = x$ korral?

13. Tõestage, et hulga $X \neq \varnothing$ kõigi alamhulkade hulk $\mathcal{P}(X)$ on ring tehete $\triangle$ ja $\cap$ suhtes, kus $\triangle$ (hulkade sümmeetriline vahe) on defineeritud võrdusega

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$A, B \in \mathcal{P}(X)$. Mis on selle ringi ühikelement?

14*. (1 nädal, 1 punkt) Tõestada, et lõplik kommutatiivne nulliteguriteta (assotsiatiivne, aga ühikelemendi olemasolu ei ole eelduseks) ring R, milles on vähemalt kaks elementi, on korpus.

Vihje: Vaadelda kujutusi $r\cdot : R \setminus \{0\} \to R \setminus \{0\}$, $r \cdot (x) = rx$, $r \in R \setminus \{0\}$.