Algebra I 3. praktikumi ülesanded: vektorruumid ja lineaarne sõltuvus

1. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ tavaliste tehete suhtes arvudega: a) $\mathbb{N}$, b) $\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $\mathbb{R}$, e) $\mathbb{C}$, f) $\mathbb{R}^+$?

2. Olgu X mittetühi hulk ja $\mathcal{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Defineerime hulga X alamhulga A korrutised korpuse $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ elementidega (skalaaridega) järgmiselt: $\overline{1}A = A$, $\overline{0}A = \emptyset$. Kas hulk $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{Z}_2$?

3. Defineerime hulgal $\mathbb{Z}^n$ liitmise ja reaalarvudega korrutamise järgmiselt:
$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \quad k(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n)$
mistahes $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral. Kas $\mathbb{Z}^n$ on vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$?

4. Teha kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ maatriksite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes; igas vektorruumis leida mõni baas:
a) $\bigcup\limits_{m,n\in\mathbb{N}} \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$; b) $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$; c) $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$; d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$; e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

5. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiviisiliselt. Teha kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$:
a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$; b) kõigi n. astme polünoomfunktsioonide hulk;
c) kõigi ülimalt n. astme polünoomfunktsioonide hulk;
d) kõigi polünoomfunktsioonide $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulk, mille korral
i) $f(0) = 1$; ii) $f(0) = 0$; iii) $2f(0) - 3f(1) = 0$; iv) $f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = 0$;
e) selliste n-muutuja funktsioonide $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hulk, mille korral
$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$, kus $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.

6. Olgu a vektor ja α skalaar. Millal $\alpha a = 0$?

7. Olgu a, b vektorid ja α, β skalaarid. Tõestada, et $\alpha a + \beta b = \beta a + \alpha b$ parajasti siis, kui $\alpha = \beta$ või $a = b$.

8. Milliste arvu $\lambda \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on vektorid $a_1 = (\lambda, 1, 0), a_2 = (1, \lambda, 1)$, $a_3 = (0, 1, \lambda) \in \mathbb{R}^3$ lineaarselt sõltuvad?

9. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas kehtib järgmine väide: kui $a, b, c \in V$ on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis ka $a + b, b + c$ ja $c + a$ on lineaarselt sõltumatud?

10. Olgu V vektorruum üle korpuse $\mathbb{R}$. Milliste skalaari λ väärtuste korral järeldub süsteemi a, b lineaarsest sõltumatusest süsteemi $\lambda a + b, a + \lambda b$ sõltumatus?

11. Näidata, et järgmised vektorsüsteemid on lineaarselt sõltuvad, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$, $V = \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$;
b) $f_1(x) = \sin^2 x, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = x, f_4(x) = 3, f_5(x) = \mathrm{e}^x$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

12. Tõestada, et järgmised vektorsüsteemid on lineaarselt sõltumatud vektorruumis V:
a) $(5, 3, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 4, 2)$, $V = \mathbb{R}^3$;
b) $f_1(x) = x^2 - 4x + 3, f_2(x) = 5x - 4, f_3(x) = x^2 + x + 1$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Algebra I 3. praktikumi ülesanded: vektorruumid ja lineaarne sõltuvus

13. Teha kindlaks, millised järgmistest vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektorite süsteemidest on lineaarselt sõltumatud. Lineaarselt sõltuvate süsteemide jaoks leida mõni mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

a) $x+2,\ x-2$; c) $1, (x-1)^2, x-1$; e) $1, \sin^2 x, \cos^2 x$; g) e^x, e^{2x}, e^{3x};
b) $6x+9,\ 8x+12$; d) $\sin x,\ \cos x$; f) $\sin x, \cos x, \sin 2x$; h) x, e^x, xe^x.

14. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas ruumil V on nullist erinevaid lõplikke alamruume?

15. Tuua näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$ a) baasist, b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas, c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas, d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.

16. Teha kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V üle korpuse $\mathbb{R}$ alamruumid. Leida iga alamruumi üks baas ja mõõde.

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ -b & c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R}\right\}, V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$; b) $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}, V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;
c) reaalarvuliste elementidega kaldsümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$;
d) $f_1(x) = x^2+5, f_2(x) = x^2-4x+3, f_3(x) = x^2+16x+13, V = \mathbb{R}_2[x]$;
e) $\{a + b\sin^2 x + c\cos^2 x : a,b,c \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
f) $\{a + b\sin x + c\sin^2 x : a,b,c \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

17. Iga vektorruumi jaoks ülesannetest 1.-5. leida üks baas ja mõõde.

18. Leida vektorite süsteemi lineaarkatte baas ja mõõde: $a_1 = (1,0,0,-1)$, $a_2 = (2,1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1,1)$, $a_4 = (1,2,3,4)$, $a_5 = (0,1,2,3)$, kus vektorid on antud koordinaatidega mingi baasi suhtes.

19. Olgu V kõigi ülimalt n. astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruum ja $c \in \mathbb{R}$. Tõestada, et hulk L, mis koosneb neist V polünoomidest, mille juur on c, on alamruum, ja leida selle mõõde.

20. Teha kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leida vektori $a = (3,7,13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:
a) $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (1,1,0)$, $a_3 = (1,1,1)$;
b) $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,2,3)$, $a_3 = (1,4,9)$.

21. Leida vektorruumi $\mathbb{C}$ üle $\mathbb{R}$ vektori $-5+4i$ koordinaadid baasi $-1+2i, 2-i$ suhtes.

22. Leida vektorruumi $V = \{a + b\sin^2 x + c\cos 2x | a,b,c \in \mathbb{R}\}$ vektori a) $5 + \sin 2x$, b) $2 + \sin^2 x - 5\cos^2 x$ koordinaadid baasi $1, \sin^2 x, \cos 2x$ suhtes.

23. Tõestada, et vektorsüsteem $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$ on baas vektorruumis $\mathbb{R}_3[x]$ ja leida polünoomi $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ koordinaadid sellel baasil.

24*. (1 nädal, 1 punkt) Hulgateoorias kehtivad valemid $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ja $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Olgu S ja T vektorruumi V alamruumid. Tõestada, et kehtib valem $\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$. Anda analoogiline valem kolme alamruumi S, T ja U jaoks ning teha kindlaks, kas viimane valem kehtib igas vektorruumis.