Algebra I 3. praktikumi vastused ja näpunäited: vektorruumid ja lineaarne sõltuvus

1. Vektorruumid on d) ja e).

2. On küll vektorruum.

3. Ei ole vektorruum. Näpunäide: vaadelda vektorit $(1+1)(1,\ldots,1)$.

4. Vektorrruumid on
b), mille baasiks on maatriksid E^{ij}, kus $E^{ij}_{ij} = 1$ ja $E^{ij}_{kl} = 0$, kui $k \neq i$ või $l \neq j$;
c), baasiks on $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$;
e), mille baas on $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.
Juhul a) ei ole liitmine üldse defineeritud, juhul d) annab tulemuseks sobimatuid maatrikseid.

5. Vektorrruumid on a), c), d) ii)-iv) ja e). b) ja d) i) ei ole liitmise suhtes kinnised.

6. Parajasti siis, kui $a = 0$ või $\alpha = 0$.

8. Väärtuste 0 ja $\pm\sqrt{2}$ korral.

9. Väide kehtib.

10. Juhul, kui $\lambda \neq \pm 1$.

11. Vajaliku mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni kordajad: a) (-5,4,1); b) (3,3,0,-1,0).

13. Lineaarselt sõltumatud on süsteemid a), c), d), f), g) ja h).
Mittetriviaalsete lineaarkombinatsioonide kordajad: b) (4,-3); e= (1,-1,-1).

Tüüpiline viis sõltumatust näidata on võtta ette lineaarkombinatsioonina saadud funktsioon $\sum_{i=1}^{n} k_i f_i$, leida selle väärtused n hästi valitud punktis ja lahendada saadud LVS k_i suhtes. Selle LVS maatriks on alati $\begin{pmatrix}f_1(x_1) & \ldots & f_n(x_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ f_1(x_n) & \ldots & f_n(x_n)\end{pmatrix}$. Kui punktid on hästi valitud, siis on tegu Crameri peajuhuga ja süsteemil on vaid null-lahend.

14. Ei ole. Näpunäide: minimaalne nullist erinev alamruum on kujul $\{rx | r \in \mathbb{R}\}$, kus $x \neq 0$ on mingi vektor.

15. Olgu $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (0,1,1,1)$, $a_3 = (0,0,1,1)$, $a_4 = (3,2,1,0)$, $a_5 = (1,0,0,0)$. Vektorruumi $\mathbb{R}^4$:

a) baas on näiteks a_1, a_2, a_3, a_4;
b) lineaarselt sõltumatu süsteem, mis ei ole baas: a_1, a_2, a_3;
c) moodustajate süsteem, mis ei ole baas: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;
d) süsteem, mis ei ole moodustajate süsteem ega lineaarselt sõltumatu: a_1, a_2, a_5.

16. Alamruumid on

b) mõõtmega 2, baasiks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;

c) mõõtmega $\frac{n(n-1)}{2}$, baasiks maatriksid

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ jne;}$$

d) mõõtmega 3 ja baasiks f_1, f_2, f_3, kui eeldada, et küsimus on $\mathrm{span}(f_1, f_2, f_3)$ kohta;
e) mõõtmega 2 ja baasiga 1, $\sin^2 x$;
f) mõõtmega 3 ja baasiga 1, $\sin^2 x$, $\sin 2x$.

17.

1. d) mõõde on 1, baas on 1;
   e) mõõde on 2, baas on 1, i;
2. mõõde on $|X|$, baasiks on üheelemendilised alamhulgad;
5. a) mõõde on lõpmatu ja baas konstrueerimatu;
   c) mõõde on $n+1$ ja baas on $1, x, x^2, \dots, x^n$;
   d) ii) mõõde on n ja baas on $x, x^2, \dots, x^n$;
   d) iii) mõõde on $n-1$ ja baas on $x-3, x^2+x-6, x^3+x^2+x-9, \dots,$
   $x^n + \dots + x^2 + x - 3n$;
   d) iv) mõõde on $n-1$, baas on $x - \frac{\sum_{i=1}^{k} i}{k}$, $x^2 + x - \frac{\sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} i^2}{k}, \dots,$
   $x^n + \dots + x^2 + x - \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i^n}{k}$;
   e) mõõde on $n+1$ ja baas on $x_1, \dots, x_n, 1$.

18. Lineaarkatte mõõde on 3 ja baas on a_1, a_3, a_5.

19. Selle alamruumi mõõde on n.

20. Mõlemad süsteemid on sõltumatud, a koordinaadid on a) (-4,-6,13); b) (1,1,1).

21. Koordinaadid on $(1, -2)$.

22. Antud "baas" ei ole lineaarselt sõltumatu.

23. Koordinaadid on $(10, 20, 15, 4)$.