

Algebra I 4. praktikumi ülesanded: kompleksarvud

1. Leida reaalarvud x ja y võrrandist:

a) $(2x + y) + (x - 2y)i = 4 + i$;

c) $x - 2i + 3iy - 4 = 5 + 6i$;

b) $2x - 5i + 6y + 3xi = 2 - 7i$;

d) $(1 + 3i)x + (5 - 2i)y = 7 - i$.

2. Arvutada :

a) $\frac{i}{2+i}$; b) $\frac{5}{3i-4}$; c) $\frac{1+2i}{1-2i}$; d) $\frac{3-4i}{2i+1}$; e) $\frac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; f) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; g) $\frac{7i-5}{i+6} - \frac{6i-2}{i+3}$.

3. Arvutada:

a) $(3i - 2)(2i + 1)$; b) $(2i+1)(2i-1) + (3+\sqrt{2}i)(4+\sqrt{3}i)$;

c) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; d) $(4-i)(2+3i) + (7-i)(4+5i)$.

4. Tõestada võrdus $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$.

5. Kas kahe arvu ruutude summa võib olla negatiivne?

6. Kujutada 2. ülesande lahendid ja nende kaaskompleksarvud komplekstasandi punktidenä.

7. Kujutada komplekstasandil nende punktide hulk, mille korral moodul r ja argument φ rahuldavad järgmisi tingimusi:

a) $r = 3$; b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; c) $\varphi \in [0, \pi]$; d) $r \in [4, 5]$; e) $r = 1, \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$; f) $r \leq 3, \varphi \in [0, \pi]$.

8. Millal on $(a + bi)^2$ puhtimaginaaararv, st. kompleksarv kujul di , kus $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

9. Milline on järgmiste suuruste geomeetiline tähendus kompleksarvu z korral:

a) $|z|$;

b) $|\operatorname{Re} z|$;

c) $|\operatorname{Im} z|$?

10. Tõestada võrdused:

a) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$;

e) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;

h) $\overline{z^n} = \bar{z}^n, n \in \mathbb{N}$;

b) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$;

f) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

i) $|\bar{z}| = |z|$;

c) $\overline{\bar{z}} = z$;

g) $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}, z_2 \neq 0$;

j) $z\bar{z} = |z|^2$.

d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

11. Tõestada, et mistahes kompleksarvude z_1 ja z_2 korral

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

12. Millistel tingimustel a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$?

13. Arvutada:

a) $\frac{1}{i^3}$;

c) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44}$;

e) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{50}$.

b) $i^n, n \in \mathbb{Z}$;

d) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^n, n > 4$;

14. Viia järgmised kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule:

a) 3 ; b) $2i$; c) $1 + i$; d) $\sqrt{3}i - 1$; e) $-i - \sqrt{3}$; f) $1 + i^3$; g) $\frac{1+i}{1-i}$; h) $(2i - 3)^2$.

15. Arvutada:

a) $(\sqrt{3}i + 1)^5$; b) $(1 - i)^{2012}$; c) $(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i})^{30}$; d) $\frac{(1-i)^{35}}{(1+\sqrt{3}i)^{25}}$; e) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{3})^n, n \in \mathbb{N}$.

Algebra I 4. praktikumi ülesanded: kompleksarvud

16. Arvutada:

- a) $3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \cdot 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$;
 b) $2(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}) \cdot 6(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7})$;
 c) $(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \cdot 5(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \cdot 7(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$;
 d) $\frac{\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ}{\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ}$; e) $\frac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$; f) $\frac{5(\cos 109^\circ + i \sin 109^\circ)}{3(\cos 49^\circ + i \sin 49^\circ)}$.

17. Leida juure kõik väärtused ja kujutada need komplekstasandi punktidenä:

- a) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; d) $\sqrt[3]{1 + i}$; g) $\sqrt[6]{(1 - i)^3}$; j) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}}$;
 b) $\sqrt{2i}$; e) $\sqrt[3]{(1 + i)^3}$; h) $\sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}}$;
 c) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt[3]{i}$; i) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; k) $\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1-i\sqrt{3}}}$.

18. Leida järgmiste võrrandite lahendite hulgad:

- a) $z^3 = -i$; b) $z^8 = 1 - i$; c) $\bar{z} = z^3$; d) $z^2 = 3i - 2$; e) $\bar{z}^2 = z^{n-1}$, $n > 1$.

19. Lahendada võrrandisüsteem:

- a)
$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 15 - 2i \\ (3i + 1)x + (2i - 1)y = 1 + i \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} (4 - i)x + (2i + 2)y = 9 \\ (i + 3)x + (2 + 3i)y = 4 + 3i. \end{cases}$$

20. Tõestada, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$.

21. Leida ja kujutada komplekstasandi punktidenä kõik 2., 3., 4., 5., 6., 12., 16. ja 24. astme ühejuured.

22. Tõestada, et

- a) n -nda astme ühejuure ja m -nda astme ühejuure korrutis on nm -nda astme ühejuur;
 b) kui n ja m suurim ühistegur on 1, siis iga nm -nda astme ühejuur on esitatav n -nda astme ühejuure ja m -nda astme ühejuure korrutisena;
 c) kui n ja m suurim ühistegur on 1, siis n -nda astme algjuure ja m -nda astme algjuure korrutis on nm -nda astme algjuur ning vastupidi;
 d) kui ϵ on n . astme algjuur, siis ϵ^k on n . astme algjuur täpselt siis, kui $\text{SÜT}(k, n) = 1$.

23. Leidke 2., 3., 4., 5., 6., 8., 12., 16. ja 24. astme algjuured.

24. Leidke kõigi n -nda astme ühejuurte a) summa; b) korrutis.

25. Olgu z n -nda astme ühejuur. Arvutada $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$. (NB! Juhud $z \neq 1$ ja $z = 1$.)

26. Avaldada $\sin n\varphi$ ja $\cos n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) $\sin \varphi$ ja $\cos \varphi$ kaudu.

27. Leida $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

28. Tõestada, et: a) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$;
 b) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$; c) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$.

29. Lahendada võrrand:

- a) $z^2 - 4z + 5 = 0$; b) $2z^2 - 4z + 3 = 0$; c) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

30. Tõestada, et $\frac{(1+i\sqrt{3})^{3n}}{(1+i)^{4n}} = 2$.

31*. (1 nädal, 1 punkt) Tõestada, et $\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$.