

Algebra I 5. praktikumi ülesanded:
alamstruktuurid ja isomorfismid

1. Olgu antud rühmoid $A = \{a, b, c, d\}$ oma Cayley tabeliga

*	a	b	c	d
a	a	c	d	d
b	a	a	b	b
c	d	a	c	d
d	d	c	d	c

Teha kindlaks, millised alamhulkadest $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{a, c, d\}$ on rühmoidi A alamrühmoidid. Kas sellel rühmoidil on veel alamrühmoide?

2. Leida rühma $(\mathbb{Z}_n, +)$ kõik alamrühmad.

3. Tõestada, et rühma alamrühmade ühisosa on samuti alamrühm.

4. Olgu $H \subseteq G$ rühma G lõplik mittetühi alamhulk. Tõestada, et kui H on kinnine rühma tehte suhtes, siis ta on rühma G alamrühm.

5. Tõestada, et igal lõpmatul rühmal on lõpmata palju alamrühmi.

6. Olgu $X, Y \neq \emptyset, Y \subseteq X$. Teha kindlaks, kas hulk $\mathcal{P}(Y)$ on ringi $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ alamring.

7. Teha kindlaks, kas järgmine hulk on ringi $R = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ alamring:

$$\text{a) } S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}; \quad \text{b) } S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

8. Leida ringide $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{10}$ ja \mathbb{Z}_{12} kõik alamringid.

9. Kas ring, mis ei ole korpus, võib sisaldada alamkorpust?

10. Leida korpuse \mathbb{R} vähim alamring ja -korpus, mis sisaldab arvu a) $\sqrt{2}$, b) $\sqrt{5}$.

11. Leida korpuse \mathbb{C} vähim alamring ja -korpus, mis sisaldab arvu a) i , b) $1 + i$, c) $2i$.

12. Tõestada, et poolrühmad $(\mathcal{P}(X), \cap)$ ja $(\mathcal{P}(X), \cup)$ on isomorfsed.

13. Tõestada, et rühmad $(\mathbb{Q}, +)$ ja (\mathbb{Q}^+, \cdot) ei ole isomorfsed.

14. Teha kindlaks, kas järgmised rühmad on isomorfsed:

a) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$; ja $(\mathbb{Z}_4, +)$;

b) $(\mathbb{Z}_6, +)$ ja $(U(\mathbb{Z}_7), \cdot)$, kus $U(\mathbb{Z}_7)$ on ringi \mathbb{Z}_7 pööratavate elementide rühm.

15. Olgu $f : G_1 \rightarrow G_2$ multiplikatiivsete rühmade isomorfism. Tõestada, et $f(1) = 1$, $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ ja elemendid a ja $f(a)$ on sama järku.

Algebra I 5. praktikumi ülesanded:
alamstruktuurid ja isomorfismid

16. Tõestada, et järgmised rühmad on isomorfseid:

a) $(\mathbb{R}, +)$ ja (\mathbb{R}^+, \cdot) ; b) $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(2\mathbb{Z}, +)$;

c) $(\mathbb{Z}_n, +)$ ja $\left(\left\{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & -\sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & \cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix} \mid k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}, \cdot \right)$;

d) $(\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}, \circ)$ ja $(\{(a, b) \mid a \neq 0\}, *)$, kus
 $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$;

e) $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0 \right\}, \cdot \right)$ ja $(\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 > 0\}, \cdot)$;

f) $\left(\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}, \cdot \right)$ ja $(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$;

g) n . järku ruutmaatriksid, mille igas reas ja veerus on üks üks ja ülejäänud elemendid on nullid, korrutamise suhtes; ning substitutsioonirühm S_n ;

h) suvalised kaks sama elementide arvuga lõplikku tsüklilist rühma;

i) suvalised kaks lõpmatut tsüklilist rühma.

17. Leida isomorfismi täpsusega kõik kolmandat (neljandat, kuuendat) järku rühmad.

18. Tõestada, et iga n . järku rühm on isomorfne rühma S_n mingi alamrühmaga.

19. Tõestada, et rühma automorfismide hulk on rühm kujutuste kompositsiooni suhtes.

20. Olgu $G = (\mathbb{Q}, +)$ ja $q \in \mathbb{Q}$. Tõestada, et rühma G automorfismideks on parajasti kujutused $\varphi : G \rightarrow G$, kus $\varphi(a) = qa$.

21. Tõestada, et ringi (korpuse) automorfismid moodustavad rühma teisenduste kompositsiooni suhtes. Leida \mathbb{Z} (\mathbb{Q}, \mathbb{R}) automorfismide rühm.

22. Kas korpused $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ja $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ on isomorfseid?

23. Olgu $\varphi : R \rightarrow S$ ringide isomorfism. Tõestada, et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ ja $\varphi(1) = 1$.

24. Tõestada, et kui $\varphi : R \rightarrow S$ on ringide isomorfism ja R on korpus, siis ka S on korpus.

25. Tõestada, et kui K ja K' on isomorfseid korpused ühikelementidega 1 ja 1' ning nullelementidega 0 ja 0', siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $n1 = 0$ siis ja ainult siis, kui $n1' = 0'$.

26. Ringi R karakteristikaks $\text{char}(R)$ nimetatakse vähimat arvu $n \in \mathbb{N}$, mille korral $n1 = 0$. Kui sellist arvu ei leidu, siis $\text{char}(R) = 0$. Olgu K korpus. Tõestada, et

a) kui $\text{char}(K) = 0$, siis tema minimaalne alamkorpus on isomorfne korpusega \mathbb{Q} ;

b) kui $\text{char}(K) = p$, siis tema minimaalne alamkorpus on isomorfne korpusega \mathbb{Z}_p .

27*. (1 nädal, 1 punkt) Leida (isomorfismi täpsusega) kõik rühmad, mille iga mitte-üheelemendiline alamrühm on isomorfne rühma endaga.