

Algebra I 5. praktikumi vastused ja näpunäited:
alamstruktuurid ja isomorfismid

1. Kõik kolm alamhulka on alamrühmoidsid. Lisaks on alamrühmoidsid ka A ja $\{c\}$.
2. Rühma $(\mathbb{Z}_n, +)$ kõik alamrühmad on $(\mathbb{Z}_k, +)$, $k|n$.
5. Näpunäide: kui rühmas on lõpmatut järku element, siis selle elemendi poolt tekitatud alamrühm on isomorfne rühmaga $(\mathbb{Z}, +)$, millel on lõpmatu palju alamrühmi kujul $k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Kui kõik elemendid on lõplikku järku, siis igäüks neist tekitab lõpliku alamrühma ja neid alamrühmi rühmast aina eemaldades ja uut elementi võttes saame lõpmatu jada erinevaid alamrühmi.
6. On küll alamring.
7. Mõlemad hulgad on alamringid.
8. \mathbb{Z}_7 : $\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}_7$;
 \mathbb{Z}_{10} : $\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_{10}$;
 \mathbb{Z}_{12} : $\{\bar{0}\}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12}$.
9. Jah. $\mathbb{C} \subset \text{Mat}_2(\mathbb{R})$.
10. Alamring: a) $\{a2 + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, b) $\{a5 + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Alamkorpus: a) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, b) $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
11. Alamring: a) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, b) $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, a - b \in 2\mathbb{Z}\}$,
c) $\{a + bi \mid a \in 4\mathbb{Z}, b \in 2\mathbb{Z}\}$.
Alamkorpus: kõikidel juhtudel $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
12. Näpunäide: vaadelda kujutust $A \mapsto X \setminus A$.
13. Näpunäide: oletame, et leidub isomorfism $\varphi : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^+$. Vaadelda arvu $\varphi(\frac{q}{2})$, kus $q = \varphi^{-1}(2)$.
14. a) Ei ole. Näpunäide: \mathbb{Z}_4 sisaldab kolmandat järku elementi, aga $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ei sisalda.
b) On küll. Näpunäide: vaadelda kujutust $\bar{z} \mapsto \bar{3}^z$.
16. Näpunäide: vaadelda kujutust:
a) $r \mapsto 2^r$; b) $z \mapsto 2z$; c) $\bar{z} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2z\pi}{n} & -\sin \frac{2z\pi}{n} \\ \sin \frac{2z\pi}{n} & \cos \frac{2z\pi}{n} \end{pmatrix}$; d) $ax + b \mapsto (a, b)$;
e) $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + b\sqrt{3}$; f) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$;
g) mis seab igale maatriksile vastavusse substituutsiooni, mis teisendab elemendi n selle maatriksi n -da rea nullist erineva elemendi veerunumbriks;
h,i) $a^k \mapsto b^k$, kus a, b on nende tsükliliste rühmade moodustajad.
17. Kolmandat järku: \mathbb{Z}_3 . Neljandat järku: \mathbb{Z}_4 ja $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Kuuendat järku: \mathbb{Z}_6, S_3 .

18. Cayley teoreem.

20. Näpunäide: tarvilikkuse tõestamiseks võtta $q = \varphi(1)$ ja vaadelda avaldist $n\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$, kus $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

21. Kõikidel juhtudel on vaid üks automorfism: samasusteisendus.

22. Ei ole, sest $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ei sisalda elementi, mille ruut on 2.

26. a) Selles alamkorpuses peavad olema elemendid kujul $\frac{m1}{n1}$, kus $m1 = 1 + \dots + 1$ (m korda). Need vastavad ilmselt ratsionaalarvudele.

b) Esiteks, p on alati algarv. Kõik elemendid $k1$, $k = 0, \dots, p - 1$, on erinevad ja moodustavad otsitava alamkorpuse.