Algebra I 6. praktikumi ülesanded: maatriksi astak ja pöördmaatriks

1. Leida maatriksi astak:

a) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 35 & 104 & 55 & 61 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Leida maatriksi astak sõltuvalt parameetrite a ja b reaalarvulistest väärtustest:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2 & -4 & 5 \\ a & a & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & 2b-1 & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi ühte elementi?

4. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi k rea elemente?

5. Tõestada, et kahe maatriksi summa astak ei ole suurem, kui nende maatriksite astakute summa.

6. Tõestada, et ekvivalentsete vektorsüsteemide astakud on võrdsed. Kas kehtib ka vastupidine väide?

7. Tõestada, et kui vektorid $a_1, \dots, a_k$ avalduvad lineaarselt vektorite $b_1, \dots, b_l$ kaudu, siis esimese süsteemi astak ei ole suurem kui teise süsteemi astak.

8. Tõestada, et vektor b avaldub vektorite süsteemi $a_1, \dots, a_n$ lineaarkombinatsioonina siis ja ainult siis, kui selle vektorite süsteemi astak ei muutu vektori b lisamisel.

9. Leida kõik parameetri t väärtused, mille korral vektor b avaldub vektorite a_1, a_2, a_3 lineaarkombinatsioonina, kui vektorid b, a_1, a_2, a_3 on antud koordinaatidega mingi baasi suhtes:

a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, t)$;
b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$, $b = (5, 9, t)$;
c) $a_1 = (3, 2, 5)$, $a_2 = (2, 4, 7)$, $a_3 = (5, 6, t)$, $b = (1, 3, 5)$;
d) $a_1 = (3, 2, 6)$, $a_2 = (7, 3, 9)$, $a_3 = (5, 1, 3)$, $b = (t, 2, 5)$.

Algebra I 6. praktikumi ülesanded: maatriksi astak ja pöördmaatriks

10. Leida vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) vektorite süsteemi astak ning lineaarkatte baas ja mõõde:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$;

b) $f_1(x) = 3x^2+2x+1, f_2 = 4x^2+3x+2, f_3 = 3x^2+2x+3, f_4 = x^2+x+1,\ f_5 = 4x^2+3x+4, V = \mathbb{R}_2[x]$;

c) $z_1 = 1+2i, z_2 = 2-3i, z_3 = 4+i, V = \mathbb{C}$;

d) $a_1 = (1,0,0,-1),\ a_2 = (2,1,1,0),\ a_3 = (1,1,1,1),\ a_4 = (1,2,3,4),\ a_5 = (0,1,2,3),\ V = \mathbb{R}^4$;

e) $a_1 = (1,2,1,2),\ a_2 = (2,1,2,1),\ a_3 = (0,3,0,3),\ a_4 = (1,1,1,1),\ V = \mathbb{R}^4$;

f) $f_1 = x^6+x^4,\ f_2 = x^6+3x^4-x,\ f_3 = x^6-2x^4+x,\ f_4 = x^6-4x^4+2x,\ V = \mathbb{R}_6[x]$.

11. Leida regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui:

a) $A^2-4A+E=0$; b) $A^2-A=0$; c) $A^3+5A^2-3A-E=0$.

12. Tõestada, et $(E-A)^{-1} = E+A+A^2+\ldots+A^{k-1}$, kui $A^{k-1} \neq 0$ ja $A^k = 0$.

13. Leida järgmiste maatriksite pöördmaatriksid:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$.

14. Tõestada, et täisarvuliste elementidega maatriksi A pöördmaatriks on täisarvuliste elementidega parajasti siis, kui $|A| = \pm 1$.

15. Olgu A ja B regulaarsed ruutmaatriksid. Tõestada, et võrdused $AB = BA$, $AB^{-1} = B^{-1}A$ ja $A^{-1}B = BA^{-1}$ on samaväärsed.

16. Lahendada maatriksvõrrand:

a) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$;

c) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

f) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

17*. (1 nädal, 1 punkt) Olgu A $m \times n$ maatriks ja B $n \times m$ maatriks, kusjuures $n < m$. Tõestada, et maatriks AB ei ole pööratav. Kas maatriks BA on pööratav?