Algebra I 7. praktikumi ülesanded: lineaarvõrrandisüsteemid

1. Leida kõik muutujate komplektid, mida võib valida vabadeks muutujateks:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ & & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ 3x & - & y & + & z & = & -4 \end{array}\right.$.

2. Lahendada võrrandisüsteem $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$.

3. Lahendada lineaarvõrrandisüsteem Crameri valemite abil:

a) $\left\{\begin{array}{l} ix + (2i+1)y = 1 \\ (2i-1)x - y = 3i \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{c} ix_1 - ix_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ix_2 - ix_3 = -1 \\ ix_1 + x_2 - ix_3 = -1 + 2i \end{array}\right.$.

4. Leida Gaussi meetodil lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 - i \\ 2x - 4y & = & 2 + i \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{r} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y - 4z = 9 \\ -x - 12y + 14z = 1 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{rcl} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 & = & 1 \end{array}\right.$;

d) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 & = & 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 & = & 1 \end{array}\right.$; e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & & & = & 2 \end{array}\right.$;

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$; g) $\left\{\begin{array}{r} 2x - (1+i)y - 3iz = 2 - i \\ -2x + (1+i)y + (1+3i)z = 3 \\ z = i - 3 \end{array}\right.$.

5. Leida homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteem ja üldlahend:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 24x_3 & - & 19x_4 & = & 0 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & \dots & & \\ x_{n-2} & + & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ & & x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \end{array}\right.$.

6. Lahendada järgmine lineaarvõrrandisüsteem a) üle korpuse $\mathbb{Z}_5$, b) üle korpuse $\mathbb{Z}_7$:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 4y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & 2z & = & 1 \\ y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & z & = & 1 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y + 2z & = & 1 \\ x + 2y + 3z & = & 1 \\ 4x + 3y + 2z & = & 1 \end{array}\right.$.

Algebra I 7. praktikumi ülesanded: lineaarvõrrandisüsteemid

7. Uurida süsteemi lahenduvust ja leida üldlahend sõltuvalt parameetri a väärtusest:

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ (a+1)x_1 + (a+2)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ ax_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = a^2 + 3a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a^3 + 3a^2 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^4 + 3a^3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + ax_4 = 9 \end{cases}$.

8. Lahendada lineaarvõrrandisüsteem üle korpuse $\mathbb{Z}_{17}$:

$$\begin{cases} 1x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 11x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 14 \\ 5x_1 - 9x_2 - 3x_4 = 3 \\ 7x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

9. Tõestada, et kui reaalarvuliste kordajatega lineaarvõrrandisüsteemil on olemas kompleksarvuline lahend, siis on tal ka reaalarvuline lahend.

10. Leida reaalarvuliste kordajatega kuupppolünoom $f(x)$, kui

$$f(-3) = -77, f(-2) = -13, f(-1) = 1, f(2) = -17.$$

11. Leida ülimalt 3. astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumi $P_3(\mathbb{R})$ vektori $2x^3 + 3x^2 + 3x - 2$ koordinaadid baasi $x - 1, x^2 + x + 1, x^3 - x^2 - 1, x^3 + x^2$ suhtes.

12. Tõestada, et järgmine lineaarvõrrandisüsteem ei oma ühest lahendit ainult lõpliku arvu algarvuliste moodulite järgi. Lahendada see süsteem ülejäänud algarvuliste moodulite järgi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

13*. (1 nädal, 1 punkt) Leida, milliste reaalarvude a_1, a_2, a_3, a_4 korral on järgmisel lineaarvõrrandisüsteemil nullist erinevaid lahendeid:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + a_4^2x_4 = 0 \\ a_1^3x_1 + a_2^3x_2 + a_3^3x_3 + a_4^3x_4 = 0 \end{cases}$$