Algebra I 8. praktikumi ülesanded: polünoomid, jäägiga jagamine, jaguvus

1. Leida ringis $\mathbb{R}[x]$ jagatis $q(x)$ ja jääk $r(x)$, mis tekivad polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $g(x)$, kui

a) $f(x) = 5x^4 - x^2 + 6$, $g(x) = x^2 + 3x + 2$;

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = x^3 + 4$;

c) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

2. Leida ringides $\mathbb{Z}_3[x], \mathbb{Z}_5[x]$ ja $\mathbb{Q}[x]$ jagatis $q(x)$ ja jääk $r(x)$, mis tekivad polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $g(x)$, kui $f(x) = x^5 + x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$.

3. Milliste p ja q väärtuste korral jagub polünoomiga $x^2 + ax + 1$ ringis $\mathbb{Q}[x]$ polünoom
a) $x^4 + q$; b) $x^4 + 21x - q$; c) $x^4 + px + q$; d) $x^4 - 7x + q$.

4. Kas polünoom $2x + 1$ on pööratav a) ringis $\mathbb{Z}_4[x]$, b) ringis $\mathbb{Z}_5[x]$, c) ringis $\mathbb{Z}[x]$?

5. Leida kõik ülimalt 2. astme taandumatud polünoomid üle korpuse $\mathbb{Z}_3$.

6. Tooge näiteid polünoomidest, mille ühine tegur on $x + 1$.

7. Tõestada, et kui K on kommutatiivne korpus, $\alpha, \beta \in K \setminus \{0\}$ ja $f(x), g(x) \in K[x]$, siis $\text{SÜT}(f(x), g(x)) = \text{SÜT}(\alpha f(x), \beta g(x))$.

8. Leida ringis $\mathbb{R}[x]$ polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ SÜT ja VÜK, kui

a) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;

b) $f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$, $g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x + 2$.

9. Kasutades Eukleidese algoritmi, leida polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ jaoks ringis $\mathbb{R}[x]$ sellised polünoomid $u(x)$ ja $v(x)$, et $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{SÜT}(f(x), g(x))$, kui

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;

c) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$.

10. Määramata kordajate meetodil leida polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ jaoks ringis $\mathbb{Q}[x]$ sellised polünoomid $u(x)$ ja $v(x)$, et $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, kui

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = (1 - x)^2$;

b) $f(x) = x^4$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Algebra I 8. praktikumi ülesanded: polünoomid, jäägiga jagamine, jaguvus

11. Leida ringis $\mathbb{Q}[x]$ vähima võimaliku astmega polünoom, mis annab jagamisel

a) polünoomiga $(x-1)^2$ jäägi 1 ja polünoomiga $(x+1)^2$ jäägi 5;

b) polünoomiga $(x-1)^2$ jäägi $2x$ ja polünoomiga $(x-2)^3$ jäägi $3x$;

c) polünoomiga $(x-1)^2$ jäägi $1-2x$ ja polünoomiga $(x+1)^2$ jäägi $1+2x$.

12. Leida ringides $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}_5[x]$ ja $\mathbb{Q}[x]$ polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ suurim ühistegur ja vähim ühiskordne, kui

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, $g(x) = x^2 + x + 1$;

b) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 1$, $g(x) = x^3 - 2x - 1$;

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$.

13. Leida ringis $\mathbb{Z}_2[x]$ polünoomide $f(x)$ ja $g(x)$ suurim ühistegur ja sellised polünoomid $u(x)$ ja $v(x)$, et $u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{SÜT}(f(x), g(x))$, kui

a) $f(x) = x^5 + x^4 + 1$, $g(x) = x^4 + x^2 + 1$;

b) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $g(x) = x^4 + 1$;

c) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $g(x) = x^4 + x + 1$.

14. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in R$ korral

a) $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$; b) $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$; c) $a|b \Rightarrow a|bc$.

15. Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Tõestada, et mistahes $a, b, c, u \in R$ korral

a) $\text{SÜT}(a, b) = a \Leftrightarrow ab$;

b) $\text{SÜT}(a+bc, b) = \text{SÜT}(a, b)$;

c) u on pööratav $\Rightarrow \text{SÜT}(au, b) = \text{SÜT}(a, b)$;

d) u on pööratav $\wedge\ d = \text{SÜT}(a, b) \Rightarrow du = \text{SÜT}(a, b)$.

16. Leida arvude 975 ja 645 SÜT ja VÜK a) ringis $\mathbb{Z}$; b) ringis $\mathbb{Q}$.

17. Teha kindlaks, kas elementidel a, b ringist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ on olemas SÜT ja VÜK, kui

a) $a = 3, b = 1 + \sqrt{-5}$; b) $a = 6, b = 3+3\sqrt{-5}$; c) $a = 5, b = 1 + \sqrt{-5}$.

18*. (1 nädal, 1 punkt) Olgu R kommutatiivne ring. Näidata, et kui polünoom

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in R[x]$$

on nullitegur ringis $R[x]$, siis leidub selline element $b \neq 0$, $b \in R$, et

$$ba_0 = ba_1 = \ldots = ba_n = 0.$$