

Algebra I 9. praktikumi ülesanded:
polünoomide juured

1. Leida polünoomi $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ kordajate summa, kui
 - a) $f(x) = (x^3 - 5x + 2)^{211}(-5x^3 + 9x^2 - 7x + 3)^{135}$;
 - b) $f(x) = (-3x^5 - 3x + 7)^{100}(-5x^7 - x^2 + 5)^{1000}$.
2. Leida 3. astme polünoom, millel on ühekordne juur 2 ja kahekordne juur -1 .
3. Leida ringis $\mathbb{C}[x]$ jagatis $q(x)$ ja jääk $r(x)$ mis tekivad polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomiga $g(x)$:
 - a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$, $g(x) = x - 1$;
 - b) $f(x) = 4x^3 + x^2$, $g(x) = x + i + 1$;
 - c) $f(x) = x^3 - x^2 - x$, $g(x) = x - 1 + 2i$.
4. Horneri skeemi abil arvutada $f(c)$, kui
 - a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$;
 - b) $f(x) = 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 5$, $c = -\frac{1}{2}$;
 - c) $f(x) = 2x^5 + (1 - 2i)x^4 - (3 + i)x^2 + 7$, $c = -1 + 2i$.
5. Horneri skeemi abil arendada polünoom $f(x)$ polünoomi $x - c$ astmete järgi (st leida sama polünoom $x - c$ kui muutuja suhtes)
 - a) $f(x) = x^5$, $c = 1$;
 - b) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$;
 - c) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i$, $c = -i$.
6. Horneri skeemi abil arendada polünoomi x astmete järgi (st leida sama polünoom x suhtes)
 - a) $f(x + 3)$, kui $f(x) = x^4 - x^3 + 1$;
 - b) $f(x) = (x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$.
7. Horneri skeemi abil leida polünoomi $f(x)$ juure c kordsus, kui
 - a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $c = 2$;
 - b) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $c = -2$.
8. Polünoomi $f(x)$ jagamisel polünoomidega $x - 1$ ja $x - 2$ tekivad jäägid 1 ja 2. Leida jääk, mis tekib $f(x)$ jagamisel polünoomiga $(x - 1)(x - 2)$.
9. Kasutamata jäägiga jagamise algoritmi, leida jääk, mis tekib polünoomi $x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$ jagamisel polünoomiga: a) $x^3 - 1$; b) $x^2 + 1$; c) $x^4 - 1$.
10. Leida a , kui -1 on polünoomi $x^5 - ax^2 - ax + 1$ vähemalt kahekordne juur.
11. Leida tingimus, mille korral polünoomil $x^5 + 10ax^3 + 5bx + c$ on kolmekordne nullist erinev juur.

Algebra I 9. praktikumi ülesanded:
polünoomide juured

12. Milliste p, q ja r korral jagub polünoom $x^4 + px^3 + qx^2 + r$ polünoomiga $(x - 1)^3$ ringis $\mathbb{R}[x]$?

13. Milliste a väärtuste korral omab polünoom $2x^3 - x^2 + ax + 3$ kordset juurt 1 ja milline on selle juure kordsus?

14. Tõestada, et polünoomil $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ ei ole kordseid juuri.

15. Leida parameeter a selliselt, et polünoomi $x^3 + 12x^2 + a$ kahe juure summa oleks võrdne kolmanda juurega.

16. Tõestada, et polünoomi $x^3 + ax^2 + bx + c$ juured moodustavad geomeetrilise jada parajasti siis, kui $b^3 = a^3c$.

17. Polünoomi $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$ kahe juure summa on võrdne kahe ülejäänud juure summaga. Kuidas on omavahel seotud selle polünoomi kordajad?

18. Leidke polünoomi $x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$ kõik juured teades, et nad moodustavad aritmeetilise jada.

19. Konstrueerida polünoom $f(x)$ Lagrange'i interpolatsioonivalemi abil, kasutades järgnevat väärtuste tabelleid:

$$\text{a) } \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(x) & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{c|cccc} x & 1 & i & -1 & -i \\ \hline f(x) & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 13 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{array}$$

20. Leida ringis $\mathbb{C}[x]$ SÜT($f(x), f'(x)$), kui

a) $f(x) = (x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1)$;

b) $f(x) = (x^2 - 4)^3(x^2 + 4)^2(x^4 - 16)$;

c) $f(x) = x^{k+l} - x^k - x^l + 1$.

21. Leida polünoom $g(x)$, millel on samad taandumatud tegurid, kui polünoomil $f(x)$, kuid kordsusega 1, st eraldada polünoomi $f(x)$ kordsed tegurid, ning lahutada polünoom $f(x)$ lineaartegurite korrutiseks üle \mathbb{C} , kui

a) $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1$;

b) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1$;

c) $f(x) = x^5 - 8x^4 + 25x^3 - 38x^2 + 28x - 8$.

22*. (1 nädal, 1 punkt) Olgu c_1 ja c_2 täisarvuliste kordajatega polünoomi $g(x) = x^2 + ax + b$ juured ja $f(x)$ suvaline täisarvuliste kordajatega polünoom. Tõestada, et $f(c_1) + f(c_2)$ on täisarv.